FLORICA T. CÂMPAN

LICURICII DIN ADÎNCURI



EDITURA ALBATROS

Prof. dr. doc. FLORICA T. CÂMPAN

LICURICII DIN ADÎNCURI

sau

Convorbiri despre fundamentele matematicii

Coperta de DAN STANCIU

Prof. dr. doc. FLORICA T. CÂMPAN

LICURICII DIN ADÎNCURI

sau

Convorbiri despre fundamentele matematicii



EDITURA ALBATROS

BUCUREŞTI, 1983

Referent științific:
prof. univ. dr. docent SOLOMON MARCUS

Surorii mele
Aneta Munteanu,
suflet din sufletul meu

I

HODORONC-TRONC : FILOSOFIE !

Eram singur în camera din dreapta a Bibliotecii Seminarului Matematic „Alexandru Myller" din Iași, aceea în care se găsesc enciclopediile, dicționarele, revistele de referate, rapoartele congreselor matematice, colecțiile separatelor ș.a. Căutam un volum din „Separata B", cocoțat pe o scară și ascuns de două dulapuri, cînd am auzit o voce bine cunoscută, aceea a profesorului Teodor I. Toader, fostul meu coleg de facultate, acum pensionar :

— Vezi că am avut dreptate cînd ți-am propus să vii aici ? Deocamdată nu văd pe nimeni, așa că putem discuta în voie ! Mai ales că vreau să-ți spun pe șleau că nu mi-a plăcut deloc exagerarea ta cu : „o dramă pasionantă" !

— Dar n-am exagerat deloc, stimate profesor, a răspuns dîrz nepotul meu, Ion Dan, zis Nucu. Fusese elevul colegului meu, care i-a cultivat dragostea lui pentru matematică și acum, de cînd a fost numit asistent la Facultatea de matematică, se întîlneau adesea în această bibliotecă, de care eram cu toții legați.

— De ce adică, l-am auzit continuînd, n-aș avea voie să consider o problemă ca fiind „o dramă pasionantă"? Oare numai conflictele sentimentale au dreptul la această denumire, iar acelea provocate de părerile și gîndurile matematicienilor, nu? Dacă ați ști cîte drame pasionante am descoperit de cînd am libertatea să răsfoiesc cărțile și revistele acestea, oricînd am timp și gust ! Ba, mi s-a întîmplat să rămîn cu biletul cumpărat cu trudă pentru un spectacol, fiindcă îl uitam, prins de vraja argumentelor *pro* și *contra*, susținute cu înverșunare cînd de un matematician, cînd de altul ca să convingă adversarul de temeinicia punctului

său de vedere. Şi, în clipa cînd răsuflam satisfăcut, considerînd problema lămurită, găseam un nou articol, apărut în ultimul număr al vreunei reviste, care răsturna iarăşi toate argumentele ce-mi păruseră hotărîtoare...



Universitatea din Iaşi. Biblioteca Seminarului „Al. Myller"

— Vorbeşti frumos şi cu patos, dragă Nucule, numai că eu îs prea bătrîn ca să mă mai las încîntat de vorbe dulci! Mie trebuie să-mi arăţi clar despre ce-i vorba în „drama aceea pasionantă" pe care ai descoperit-o în volumul lui Poincaré, cu care erai în mînă, acolo la raft, cînd ne-am întîlnit.

— Asta doresc şi eu, dacă vreţi să discutăm ! Această ultimă dramă, pe care o consider pasionantă şi care mă pasionează acum, este *problema raţionamentului matematic !* Gîndiţi-vă numai la faptul că au trecut peste două mii de ani de cînd matematicienii stabilesc atîtea teoreme şi teorii admirabile şi au scris atîtea mii de volume, în care le expun şi le demonstrează, şi totuşi, pînă azi nimeni nu poate da un răspuns precis la întrebarea : *care-i natura raţionamentului*

matematic ? Îndată ce se pune această întrebare, se dezlănţuie atîta nelinişte de parcă ar fi vorba să explodeze o bombă cu neutroni. Neînţelegerile sînt vechi, dar ele s-au accentuat şi mai mult din secolul al XIX-lea, de cînd cercetările s-au îndreptat spre structura matematicii şi a metodelor ei proprii de a stabili adevărurile matematice, adică spre studiul fundamentelor matematicii. E deajuns să vă amintesc numai de trei curente importante: *logicismul, formalismul* şi *intuiţionismul,* căci mai sînt şi altele, pentru care studiul fundamentelor a devenit mărul discordiei. Logiciştii afirmă că logica şi matematica înseamnă unul şi acelaşi lucru, deşi nu se înţeleg pe deplin între ei, fiindcă unii consideră că logica se reduce la matematică, iar alţii că matematica se reduce la logică ! Oricum, de comun acord, au creat un nou obiect, pe nume *logica matematică,* sau *logistica,* sau *logica simbolică.* Formaliştii nu sînt de acord cu părerea logiciştilor. Ei susţin că matematica este *un joc,* o manipulare formală de simboluri şi folosesc logica matematică numai ca pe un instrument capabil să stabilească şi să precizeze consistenţa jocului, cu alte cuvinte ca să dovedească imposibilitatea contrazicerii dintre regulile jocului. În fine, intuiţioniştii, care combat unele din tezele logiciştilor şi ale formaliştilor, consideră că matematica este o activitate ireductibilă a spiritului omenesc, condusă de intuiţie.

— Dar bine, bre omule, nu-ţi ajunge că ai la îndemînă această bibliotecă minunată, cu atîtea cărţi şi reviste în care raţionamentul matematic se lăfăie în voia lui, fără să-i pese de nici o adiere de vînt ? N-ai mai găsit alte probleme, de geometrie, de analiză, din teoria numerelor, care să te pasioneze, şi să nu umbli după cai verzi pe pereţi ?

Discuţia mă amuza, aşa că am ieşit de după dulapurile ce mă ascundeau şi m-am amestecat în vorbă :

— Am auzit ce-i spuneai lui Nucu şi mi-a venit să rîd, dragă Teodor ! Se vede că nu cunoşti meteahna nepotului meu : de cînd a dat de şurubelniţă n-a mai rămas jucărie nedesfăcută. La rînd a urmat ceasul şi nu de mult l-am găsit meşterindu-şi magnetofonul.

— Adevărat, Bădie. Abia după ce desfac un lucru şi îl fac la loc, nu-mi mai este străin şi-l îndrăgesc cu adevărat. Tot aşa s-a întîmplat şi cu articolul lui Poincaré asupra

naturii raţionamentului matematic. M-a pasionat, iar după ce am citit o parte din literatura legată de acest subiect, mă dusesem din nou la raft să-l mai citesc odată, şi atunci a venit stimatul meu profesor. I-am spus adevărul şi ai auzit cum m-a luat peste picior !

— Am auzit, de aceea am şi venit, ca să-ţi iau apărarea. Cred, dragă Toa, că de data asta are Nucu dreptate. Cînd cauţi calea pe care a urmat-o un gînd ca să stabilească un anume adevăr matematic, nu-ţi vine să te-ntrebi de ce a ales-o pe aceasta şi nu altă cale? Pe ce s-a bazat alegerea? Sau, de ce au fost preferate anumite probleme de studiu şi nu altele, anumite axiome sau anumiţi termeni primitivi şi nu alte axiome, alţi termeni primitivi ?

— Am citit undeva, Bădie, că logicianul A. Tarski susţineau că, de obicei, nu decid consideraţiile de ordin teoretic, ci, mai degrabă, acelea de ordin practic, didactic sau estetic. Eu le-aş adăuga şi pe acelea de ordin sentimental !

— Exact ! Ţin însă sa va atrag atenţia că asemenea întrebări, însoţite tot de răspunsuri contradictorii, nu se găsesc numai în cazul problemei despre natura raţionamentului matematic. În cartea tipărită de regretatul profesor Ernest Stere: *Istoria filosofiei antice şi moderne* (1) am citit că, după ce grecii au creat termenul *filosofie,* cu înţelesul clar de *iubire de înţelepciune,* s-au găsit îndată alţi filosofi, tot greci, care să mai pună şi alte întrebări despre înţelesul acestui cuvînt şi astfel, din răspunsurile lor au rezultat o sumedenie de teorii, care se contrazic între ele, de atunci şi pînă acum.

— Frumos, numai că prin această observaţie a ta, interesul pentru problema pusă de Nucu nu s-a micşorat, ci aş spune că a crescut. De pildă, eu aş mai adăuga la întrebarea despre natura raţionamentului matematic şi pe aceea despre natura noţiunilor matematice ! Şi dacă primeşti discuţia, aş lua şi eu parte, bucuros la ea, căci m-ar interesa să cunosc acest capitol din istoria matematicilor, ţesut din răspunsurile găsite de Nucu la problema care l-a prins în mrejele ei !

— Desigur, şi mă bucură să ni te alături, dar ţin să-ţi amintesc că după părerea lui André Malraux „istoria este

istoria succesiunii întrebărilor şi nu a succesiunii răspunsurilor" !

— Îmi place răspunsul, stimate profesor, şi m-aţi ajutat mult cu acest citat, căci eu nu am de gînd să fac *istorie*, ci *filosofie !*

— Cum ? Aşa, hodoronc-tronc, filosofie ?

— Da, şi pînă nu vă răzgîndiţi, eu am să alerg ca să aduc de alături *La Science et l'Hypothèse* (2), căci cu ea în faţă vreau să începem discuţia noastră.

— Frumoasă carte, am zis, în timp ce Nucu se îndepărta. Deşi a fost scrisă la începutul veacului, nu şi-a pierdut nimic din prospeţime, pe cînd altele, apărute cu 10—15 ani în urmă, nu-ţi mai vine să le citeşti.

— Observaţia ta mă duce la o alta, pe care am reţinut-o din cartea lui Georges Poulet : *Conştiinţa critică.* (3) Anume, scria el că, atîta timp cît o carte stă pe masă sau în raftul unei biblioteci, ea nu reprezintă decît un obiect de hîrtie, dar cînd ai deschis-o şi începi să o citeşti, obiectul de hîrtie dispare, deşi a rămas prezent, ca să ţi se înfăţişeze înaintea ta o fiinţă dotată cu raţiune, o conştiinţă, care-ţi permite să-i cunoşti gîndurile, ideile, ba chiar şi să *gîndeşti cu gîndirea ei* !

— Iată cartea lui Poincaré cu articolul meu, care începe cu această sclipitoare dilemă pe care vreau să v-o citesc,



Jules Henri Poincaré

a spus Nucu, întrerupîndu-ne: „Însăşi posibilitatea ştiinţei matematice pare o contradicţie insolubilă. Dacă această ştiinţă nu-i deductivă decît în aparenţă, de unde-i vine acea rigoare perfectă de care nu se îndoieşte nimeni? Dacă, din contra, toate propoziţiile pe care le enunţă se pot deduce unele din altele, prin regulile logicii formale, cum de nu se reduce matematica la o imensă tautologie? Silogismul nu ne poate învăţa nimic esenţial-nou şi dacă totul decurge din principiul identităţii, ar trebui ca totul să se reducă la el. Putem oare admite că enunţurile tuturor teoremelor cu care sînt umplute atîtea volume, să nu fie decît modalităţi diferite de a spune că *A* este *A*?" Nu numai în acest loc, dar şi în multe altele, îi hărţuia Poincaré pe logicienii care afirmau că raţionamentul matematic este o tautologie, şi pe formalişti, cărora le arăta că matematica nu se putea reduce la un joc de şah, fiindcă acesta nu îndeplinea condiţiile care i-ar fi dat dreptul să fie o ştiinţă.

— După mine, unul, avea dreptate. Nici eu nu-mi pot închipui că în matematică, formula $A = A$ s-ar putea reduce la o tautologie, goală de conţinut. Să admit, de exemplu, că notez cu *A* suma unghiurilor dintr-un triunghi, şi tot cu *A* mărimea a două unghiuri drepte. $A = A$ exprimă atunci teorema: „suma unghiurilor dintr-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte". Acest adevăr nu-i o tautologie, ci o creaţie matematică, pe care am stabilit-o nu numai pe baza unor scheme formale, ci şi printr-o demonstraţie!

— În această privinţă a intervenit profesorul Toader, meritul este al geometriilor greci, care au transformat matematica într-o ştiinţă deductivă. În special, caracterul deductiv al raţionamentului matematic a fost pus în evidenţă de Aristotel; el a arătat că propoziţiile demonstrate se bazează unele pe altele, iar dintre acestea unele sînt admise fără demonstraţie; totodată că între termenii cuprinşi într-o propoziţie matematică, unii sînt *primitivi*, adică se prezintă ca *noţiuni nedefinite*, iar ceilalţi, *termenii definiţi*, se bazează pe aceşti termeni primitivi.

— N-aş putea spune dacă Poincaré a stabilit care-i natura raţionamentului matematic, dar ştiu bine că el a căutat să atragă atenţia asupra faptului că raţionamentul matematic

„are în el însuşi un fel de virtute creatoare prin care se deosebeşte de silogism".

— În privinţa silogismului, s-ar cuveni, cred, să-l considerăm îndeaproape, fiindcă, oricare ar fi părerea voastră, unchi şi nepot, nu există demonstraţie matematică în care să nu apară silogismul!

— Nu te contrazic, dragă prietene, dar după cum bine ştii, Aristotel însuşi a remarcat că nu orice silogism înseamnă o demonstraţie! Şi chiar din Antichitate s-au găsit destui filosofi care să-i conteste valoarea, arătînd că el *nu ne învaţă nimic esenţial-nou.* N-am decît să-ţi amintesc de stoici, care afirmau că mecanismul silogismului este un *cerc vicios* care lasă numai impresia că ar stabili o demonstraţie!



René Descartes

— Daţi-mi şi mie voie, stimate profesore, să prezint pledoaria lui Descartes împotriva silogismului. El spunea că, în orice ştiinţă, deducerea adevărului trebuie să se facă după modelul raţionamentului matematic şi nu pe baza logicii formale legată de teoria silogismului. Descartes a arătat că diferenţa esenţială dintre silogism şi raţionamentul matematic constă în faptul că, silogismul, bazîndu-se pe premise univesale, stabileşte o concluzie tot universală, pe cînd în raţionamentul matematic intervine şi faza intermediară de contemplare a unui obiect individual. Or, tocmai

în această fază intermediară apare intuiția, care nu se poate referi decît la obiecte particulare și, prin aceasta, raționamentul matematic se deosebește de silogism. Ca să fie mai clar faptul că intuiția se bazează pe obiecte concrete, am să mă refer la propoziția a cincea a lui Descartes, pe care am găsit-o zilele trecute citată în cartea lui Beth și Piaget. (4, p. 7) Anume, el spune că dacă-mi imagineaz un triunghi, deși acesta nu se află nicăieri, decît în mintea mea, el are o formă determinată care nu-i inventată de mine și nici nu depinde de spiritul meu. Prin construirea acestui triunghi în mintea mea, eu pot să descopăr diferite proprietăți pe care le au triunghiurile și la care eu nu mă gîndisem mai înainte. Bazîndu-se pe acest fel de raționament intuitiv, Descartes susținea că deducerea adevărului trebuia să se bazeze pe alte adevăruri, precizate anterior. Și, pentru a stabili adevărurile *certe și autentice*, cum le numea Descartes, el a fixat patru reguli, pe care le-am învățat pe de rost. Iată-le :

1. Să nu accepți niciodată un lucru ca adevărat, dacă nu l-ai cunoscut în mod evident, adică să nu existe nici un prilej ca să te-ndoiești de el.
2. Să împarți dificultățile în mai multe părți, atîtea cîte sînt necesare ca ele să poată fi rezolvate.
3. Să-ți conduci gîndurile în ordine, începînd de la cele simple către cele complexe.
4. Să faci enumerări cît mai complete și recapitulări generale, ca să nu uiți nimic."

— Foarte frumos, numai că atunci cînd Descartes s-a întrebat care adevăruri pot fi recunoscute ca fiind *certe*, pentru ca din ele să poată deduce pe celelalte, mi se pare că a cam încurcat-o !

— Nu sînt de părerea dumneavoastră, dragă profesore. Oare acel celebru : „gîndesc *deci exist*", nu înseamnă nimic ?

— Cum să nu ! Doar de aici a tras concluzia că „lucrurile pe care le concepem foarte clar și distinct sînt toate adevărate". Numai că, iarăși, i-a fost cam greu să decidă ce s-ar putea socoti că-i *clar și distinct ?*

— Dar de ce-mi necăjești atîta nepotul, mă rog ? Știi bine că Descartes a considerat că adevărurile cu asemenea calități rezultă numai din *intuițiile rațiunii* și a precizat că asemenea intuiții nu-și au originea în simțuri. Adevărurile

clare şi distincte, spunea el, sînt descoperite de minte în mod nemijlocit şi fără demonstraţii, printr-o cunoaştere intuitivă care are la bază raţiunea şi nu experienţa ! Asta fiindcă experienţa poate induce în eroare.

— Ai dreptate, Bădie. Raţionalismul creat de Descartes se bazează pe aceste principii. „În matematică", spunea el, „adevărurile se deduc în mod succesiv prin raţionament, demonstraţia matematică este formată dintr-un lanţ de judecăţi şi deduceri, şi nu din concluziile trase din analiza relaţiilor formate din cele trei noţiuni cerute de silogism". Lui îi datorăm forma modernă a logicii, în care raţionamentul apare ca o înţelegere a raporturilor dintre obiectele în sine. El susţinea că am putea stăpîni natura dacă am înlocui filosofia speculativă cu una practică, în care să se prezinte puterea şi acţiunea focului, a apei, a aerului precum şi a tuturor lucrurilor ce ne înconjoară.

— N-am să te mai contrazic, căci văd că te-ai aprins rău de tot ; ţin doar să adaug că în Evul Mediu *logica* sau *teoria despre gîndire* era privită de *scolastici* ca ştiinţa cea mai bine întocmită şi chiar Descartes nu o considera lipsită de certitudine !

— Desigur, dragă profesore, de aceea a şi afirmat el că „majoritatea regulilor ei servesc să explice altuia lucrurile bine cunoscute" sau „ca să vorbească fără a judeca despre lucruri necunoscute" ! Dacă n-ar fi făcut decît aceste două observaţii, tot ar fi meritat admiraţia şi dragostea mea, pe care ţin să o mărturisesc aici !

— Ei ! Ce mai zici, dragă Toadere ? Te-a dat gata, Nucu ? Mai ai ce-i replica ?

— Ştiu şi eu ? Poate că nestatornicia tinereţii. A alergat cu sufletul la gură ca să ne aducă aici cartea lui Poincaré şi, plin de entuziasm, a început să ne citească din ea. Apoi, dintr-o dată a lăsat totul baltă ca să-i facă o declaraţie de dragoste lui Descartes !

— Asta-i cam aşa, o recunosc şi eu ! Dar simţeam nevoia să-l reabilitez pe Descartes şi să repar nedreptatea pe care i-au făcut-o contemporanii care, neînţelegîndu-l, îi analizau raţionamentele în mod silogistic şi susţineau că toate concluziile lui sînt absurde ! E adevărat că de atunci şi pînă la Poincaré au trecut peste două veacuri, timp în care

raţionamentul matematic şi-a găsit destui şlefuitori. În cartea lui Beth, despre care v-am vorbit adineauri, am găsit această frază ce mi-a plăcut mult: „Azi este permis să se considere ca definitiv faptul că raţionamentul matematic, aşa cum s-ar prezenta, de exemplu, într-o versiune perfec-



Euclid

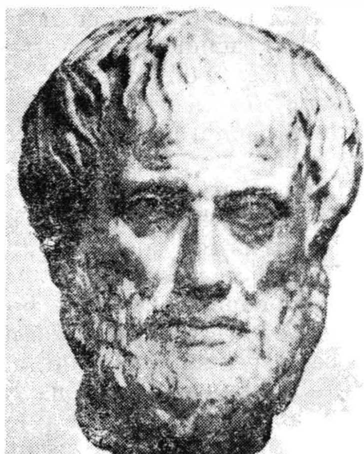
ţionată a *Elementelor* lui Euclid, nu mai poate fi reprezentat ca un şir de silogisme aparţinînd sistemului lui Aristotel". Şi ştiţi de ce? Pentru că logica lui Aristotel trebuia lărgită, deoarece teoria silogismului nu ne mai prezintă o analiză completă a raţionamentului matematic!

— Într-un articol intitulat „Invenţia matematică" (5), Poincaré arată că o demostraţie nu constă numai dintr-un şir de silogisme, ci şi din ordinea în care sînt aşezate. Ba, ceea ce ar părea paradoxal, ordinea în care sînt aşezate aceste silogisme *este mai importantă* decît silogismele însăşi! Aceasta pentru că dacă ai intuiţia acestei ordini şi poţi vedea dintr-odată întregul raţionament matematic, fiecare silogism se aşază de la sine acolo unde-şi are locul.

— Cunosc şi eu acest articol. Se mai afirmă în el că acea intuiţie a ordinii matematice nu poate aparţine oricui, ci numai acelora care au talent matematic!

— Desigur, fiindcă Poincaré era încredinţat că „te naşti matematician şi nu devii", după cum: „te naşti geometru sau te naşti analist". (6)

— Acum prevăd, stimate profesore, că mă veți acuza din nou că sar de la una la alta, dar nu pot rezista tentației de a vă povesti cum m-a făcut Bădia să admir eu cărțile lui Poincaré, de cînd eram în clasa I elementară și de atunci mi-a stîrnit curiozitatea, să le citesc.



Aristotel

— Ce aiureală ai mai scornit, mă rog ?
— Aiureală, spui mata, acum ? Atunci parcă era „point" și „carré" !
— Acum chiar că mă faci să rîd. Mai ții minte povestea aceea ?
— Dar cum era să o uit ? Tocmai de aceea vreau să povestesc cum l-am cunoscut eu pe Poincaré. Bădia a început să mă învețe unele cuvinte franțuzești înainte de a merge la școală și, cînd eram în clasa întîi elementară, ajunsesem să le și scriu. Odată, cînd m-am urcat sus, la dumnealui în cameră, citea o carte și cînd m-a văzut, s-a încruntat așa de tare că m-am speriat, gîndindu-mă că am făcut cine știe ce poznă și acum am să-mi primesc pedeapsa. Dar el nu spune nimic, ci îmi face semn să mă apropii. Apoi ia un creion de pe birou și desenează un pătrat cu un punct în mijloc. După ce-mi arată figura, îmi zice : Spune pe franțuzește ce-i asta ? Și, cu vîrful creionului îmi arată punctul.

2 — Licuricii din adîncuri 210

— *Point*, îi răspund eu.
— Şi figura ?
— *Carré* !
— Bine, acum spune la un loc aceste două cuvinte !
— Nedumerit la culme, am spus: pointcarré şi am repetat cuvîntul de cîteva ori.

Atunci unchiul meu a luat cartea pe care o citea — o văd şi acum, avea tartajele portocalii, nu negre ca acestea legate din bibliotecă —, şi mi-a arătat-o. — Priveşte ce scrie aici sus : H. Poincaré. Vezi ? Să nu uiţi acest nume că este al unui mare matematician şi cînd ai să fii student, poate că are să-ţi placă şi ţie să citeşti aceste cărţi care-mi plac mie foarte tare !

— N-am să-l uit ! am răspuns eu, dar de ce a uitat el să-l pună pe „t", am adăugat tot nedumerit, la care unchiul n-a ştiut ce să spună şi a deschis sertarul în care stătea ascunsă comoara mea de bomboane. Şi acum iată de ce, din cauza acestor aiureli mă mai duc odată să aduc şi cărţile pe care sper să le răsfoim, aici.

— Le-am adus, a spus Nucu, şi am mai adăugat una, publicată la noi, de care prevăd că nu ne vom putea lipsi, dacă ne-am hotărît să discutăm problema raţionamentului matematic. Aici, în articolul despre „Intuiţia şi logica matematică", Poincaré merge mai departe decît o făcuse în acela asupra naturii raţionamentului matematic. Mai întîi, am să citesc cîteva rînduri, le-aş zice premergătoare celor ce urmărim noi, în care el se întreabă „ce este realitatea" ? şi răspunde : „Fiziologii ne arată că organismele sînt formate din celule : chimiştii adaugă că celulele sînt formate din atomi. Atomii sau celulele constituie realitatea sau cel puţin singura realitate ? Modul în care sînt aranjate aceste celule şi din care rezultă unitatea individului, nu-i, de asemenea, o realitate mult mai interesantă decît aceea a elementelor izolate ?... Ei bine, în matematică este ceva analog. Logicianul descompune fiecare demonstraţie într-un foarte mare număr de operaţii elementare ; după ce vor fi examinate aceste operaţii, unele după altele, şi se va constata corectitudinea lor, va fi înţeles oare şi adevăratul sens al demonstraţiei ? Va fi înţeleasă chiar dacă, după un efort al memoriei, ar putea fi repetată această demonstraţie, reproducînd toate operaţiile elementare în însăşi ordinea

în care le-a pus inventatorul ? Evident nu, noi nu posedăm încă întreaga realitate, iar acel ceva care dă unitate demonstrației, ne va scăpa complet... Ne trebuie o facultate care să ne facă să vedem de departe scopul și această facultate este intuiția. Ea este necesară exploratorului ca să aleagă drumul și nu mai puțin aceluia care urmează această cale și vrea să știe de ce a ales-o... logica ne-o poate oferi ? Nu, o dovedește numele ce i-au dat-o matematicienii. În matematică logica se numește *Analiză* și analiză înseamnă *împărțire, disecție*... Așa că, logica și intuiția au fiecare rolul lor necesar. Amîndouă sînt obligatorii. Logica, singura care dă singuranță, este instrumentul demonstrației, intuiția este instrumentul invenției". Mai încolo, Poincaré se referă la articolul cu care am început noi discuția : „Într-unul din capitolele din *Știința și ipoteza* am avut ocazia să studiez natura raționamentului matematic și am arătat cum acest raționament, fără a înceta de a fi absolut riguros, ne poate ridica de la particular la general printr-un procedeu pe care l-am numit *inducția matematică*. Prin acest procedeu analiștii au făcut să progreseze știința și dacă examinăm detaliul însuși al demonstrațiilor lor, îl vom afla în fiecare moment alături de silogismul clasic al lui Aristotel". Poincaré consideră că *inducția matematică*, adică acest *raționament prin recurență*, posedă virtutea creatoare a raționamentului matematic, fiindcă *el condensează, într-o formulă unică, o infinitate de silogisme*.

— Aici propun să ne oprim. Belferul din mine îmi cere să precizăm mai întîi în ce constă *metoda inducției matematice* sau a *inducției complete*, și apoi să vedem de ce se deosebește ea de *inducția fizică ?*

— Ideea nu-i rea deloc și aș putea să te ajut, ca să-mi mai las nepotul să-și tragă sufletul !

— Strașnic ajutor, cînd materialul se găsește chiar în primul articol.

— Cu atît mai bine ! Tu poți urmări și să ne oprești dacă vom greși. Demonstrația prin inducție matematică are la bază faptul că dacă observ că numărul 1 are o anumită proprietate pe care o întrezăresc și la celelalte numere naturale, o presupun adevărată pentru un număr n și o dovedesc că este valabilă pentru numărul $(n+1)$. De aici

trag concluzia că proprietatea respectivă este adevărată pentru toate numerele naturale *N*.

— Acum, dă-mi voie să adaug şi eu că, în acest mod de a raţiona, noi am sărit peste toate etapele finite: $n=2$, $n=3$ etc. şi ne-am oprit numai la numărul $(n+1)$ în care n nefiind definit, se poate considera că ar putea fi şi infinit de mare. Aici apare deosebirea dintre acest raţionament matematic, care nu este legat de fazele finite caracteristice experienţelor şi acela al inducţiei fizice. Poincaré vedea în el o expresie a *intuiţiei pure* ce se înfăţişează ca o judecată sintetică, apriori şi creatoare, fiindcă „numai spiritul are calitatea de a concepe repetiţia nedefinită a unui aceluiaşi act". Este un procedeu *logic intim*, care corespunde mecanismului ce conduce la o concluzie sau descoperire matematică.

— Şi de ce intim ?

— Pentru că nimeni nu a putut dezvălui, pînă acum, cum se petrece el, în interiorul conştiinţei noastre, pînă cînd ne apare gata conturat în minte. Deşi inducţia matematică şi inducţia fizică au un drum paralel şi în acelaşi sens, fiindcă ambele pornesc de la particular spre general, iar un enunţ rezultă din cel anterior lui, Poincaré consideră că raţionamentul matematic *prin recurenţă* se deosebeşte esenţial de acel *fizic inductiv*, fiindcă se bazează pe principii diferite. Generalizarea pe care o stabileşte inducţia fizică are o *notă îndoielnică*, deoarece ea se bazează pe observaţiile asupra unor serii de evenimente, fenomene sau experienţe între care *s-ar părea* că există o anumită *relaţie constantă*. Fără a folosi nici un fel de raţionament, ci numai credinţa că există în Univers o ordine independentă de noi şi de activitatea noastră, relaţia constantă ce a fost observată este transformată într-o lege empirică pe care evenimentele sau fenomenele respective ar trebui să o urmeze.

— Poincaré afirma, după cum am mai spus, că „raţionamentul prin recurenţă" nu ne vine din experienţă, căci experienţa ne-ar putea învăţa că regula este adevărată pentru primele zece, o sută de numere, adică nu pentru şirul nedefinit al numerelor, ci numai pentru o parte a lui, mai mult sau mai puţin lungă, dar totdeauna mărginită... Această regulă inaccesibilă demonstraţiei analitice şi ex-

perienței este veritabilul tip de judecată sintetică „apriori". (2, p. 23).

— Nu toți matematicienii au acceptat părerea lui Poincaré despre raționamentul prin recurență. În cartea lui Beth: *Fundamentele logice ale matematicii* (7) găsim că: „este posibil să se dea o justificare logică raționamentului prin recurență". Iată și părerea logicianului român A. Dumitriu, exprimată astfel în volumul ce l-am adus mai înainte, *Mecanismul logic al matematicilor* (8): „Pentru a justifica raționamentul prin recurență în mod riguros, mijloacele logicii elementare — formalizate — nu sînt suficiente. Pentru aceasta s-a întrevăzut posibilitatea creării unor logici mai „tari", de ordin superior logicii elementare... Cu toate acestea, putem spune de la început că o asemenea rezolvare nu va dezlega secretul raționamentului prin recurență, ci îl va strămuta în domeniul axiomelor și presupunerilor, pe care se va baza o *logică neelementară*, chiar dacă acest secret va lua altă formă".

— Cele citite de tine, Nucule, mi-au amintit de conferințele ținute la Zürich, în 1938, asupra fundamentelor matematicii. Se găsesc într-un volum din dulapul acesta de lîngă noi, la colecția „Congreselor". Dacă vrei, caută-l, aș vrea să citim cîteva rînduri de acolo, în legătură cu raționamentul matematic și natura lui.

— Mă grăbesc să o fac, căci doresc să ascult părerile unor matematicieni celebri, rostite la un sfert de veac de la moartea lui Poincaré.

— Nici eu nu sînt contra, dar mai înainte aș vrea să precizăm înțelesul a două noțiuni peste care am trecut cam ușor. Odinioară au existat multe discuții asupra lor. Anume, să revenim la noțiunile de „raționament analitic" și la cel „sintetic apriori".

— Ai dreptate, dragă Teodor. Discuțiile acestea au fost necesare îndată ce problema fundamentelor matematice a început să preocupe pe matematicieni. După cîte știu, Immanuel Kant considera că o *judecată este analitică* dacă ea se poate deduce numai din definiții și principiile logicii și este *sintetică* atunci cînd ea presupune că la baza ei există și alte date în afară de definițiile și principiile logicii.

— Dragă Bădie, mi se pare că nu-i tocmai așa! Beth, (4, p. 14) după ce confruntă părerile exprimate de Kant în

Critica rațiunii pure și în altă lucrare anterioară acesteia, ajunge la concluzia că : „judecățile sintetice sînt caracteristice numai matematicilor pure. Judecățile sintetice pornesc de la definiții care introduc noțiuni noi prin combinarea arbitrară a unor anumite noțiuni primitive. O asemenea deducție, bazată pe astfel de definiții apare ca un calcul simbolic, asemănător calculului algebric, și de aceea este propriu numai matematicii pure". Așa că, atît Descartes, cît și Kant considerau că există un raționament *intuitiv* sau *constructiv* folosit în matematica pură și un altul *formal* sau *silogistic*, propriu filosofiei. În filosofie sau în fizică se impun *judecățile analitice*, în matematică cele *sintetice*.

— Acum, acestea fiind clarificate, poți îndeplini, Nucule, dorința unchiului !

— Nu ți-a fost greu să afli volumul, ceea ce arată că buna tradiție a ordinei ce caracteriza S.M.I. pe vremea noastră, s-a păstrat neschimbată !

— Ați spus S.M.I., dragă profesore ? Ce semnificație are acest cuvînt ?

— De multă vreme nu l-am mai auzit nici eu, dragă Toa ! Și ce mîndri eram odinioară cînd îl pronunțam ! Cît ne-am bucurat cînd a apărut articolul profesorului Myller despre curba S.M.I. ! Așa-i că mata, stimate asistent al *Seminarului Matematic Iași*, habar n-ai de curba S.M.I. ?

— Mărturisesc sincer că nu, dar din felul cum m-ai apostrofat am înțeles că S.M.I. sînt inițialele numelui pe care l-a purtat biblioteca mai înainte de a i se fi adăugat și pe acela al întemeietorului ei.

— O descoperire cu care te poți mîndri ! Dar ca faima să fie deplină, ar fi bine să cunoști și curba S.M.I., descoperită de academicianul Alexandru Myller, care a format și cuvîntul. Caută articolul în dulapul „Separatelor", după ce stabilești la fișier, în ce volum se găsește. Oricum, la „Separata B", căci în „A" sînt extrase format mare !

— Am să-l caut numaidecît, Bădie. Ascultîndu-te, mă întreb dacă-mi vor intra și mie *în sînge*, așa cum simt că s-au petrecut lucrurile cu mata, fiecare colțișor, fiecare carte și raft al acestei biblioteci ?

— Ia mai lasă sentimentalismele și complimentele la o parte, că altfel ne apucă noaptea aici ! Iată, am găsit, la p. 54 ce spunea M. Fréchet (9) : „Fără a avea pretenția



Alexandru Myller

la o inovaţie, vrem să încercăm să combatem o părere încă foarte răspîndită şi să arătăm din nou că matematica nu este o teorie pur logică. Această afirmaţie se referă atît la metoda de cercetare, cît şi la conţinutul însuşi al matematicii. În ceea ce priveşte primul punct, deşi matematicianul este privit ca un savant care procedează numai prin deducţii, nu-i greu să admitem că intuiţia îi arată ce direcţie trebuie să apuce... orientarea matematicii şi sensul în care se efectuează progresul ei nu sînt condiţionate numai de necesităţile interne (organizare, sistematizare, simplificarea rezultatelor acestor transformări logice). Ea este motivată încă, şi mai ales, de cerinţele venite din afară, de problemele concrete puse de natură şi tehnică". Nu citesc mai departe căci ne-am lungi prea mult, trec la părerile altui matematician renumit, H. Lebesgue, şi încep de la p. 110: „A arăta cum se construiesc matematicile înseamnă să-i studiem fundamentele, dar dintr-un punct de vedere care ne-ar face să ne îndepărtăm mult de domeniul logicii... Matematicianul nu se ocupă decît de studiul deductiv; şi nu priveşte de altfel decît raţionamentul gata făcut, căci construcţia unui raţionament logic nu se face în mod logic. Astfel, închis în turnul său de fildeş, matematicianul se crede un triumfător, cînd în realitate nu-i decît o rotiţă într-o uzină logistică... Matematica nu-i decît un instrument

pe care alţii, filosofii, fizicienii, inginerii îl vor folosi în mod util". După cum vedeţi, nici peste un sfert de veac, problema despre natura raţionamentului matematic nu s-a lămurit, logica şi intuiţia continuă să se înfrunte.

— Dar nici peste alte trei decenii nu găsim alt fel de răspuns, deşi numărul cercetătorilor şi al lucrurilor din acest domeniu a crescut destul de mult. Ca să vă dovedesc asta, aş vrea să citesc şi eu numai cîteva rînduri din cartea lui Anton Dumitriu (8), din capitolul intitulat chiar „Natura raţionamentului matematic", care începe de la p. 278. La p. 309 discută *caracterele raţionamentului*, iar primul menţionat este *caracterul tautologic*, despre care se spune: „Am văzut că funcţia formală a raţionamentului matematic este esenţial tautologică şi că el are altă putere decît de a stabili echivalenţe între definiţii... raţionamentul matematic nu poate fi altfel decît tautologic..." Iar mai departe, la p. 313, din nou: „Ideea că raţionamentul este tautologic este o idee mai veche, dar ea a fost profesată cu multă vigoare de L. Wittgenstein şi de adepţii Şcolii din Viena... Din nefericire, toţi aceşti gînditori conchid că, dacă raţionamentul este tautologic, întreaga matematică este tautologică, cu alte cuvinte ea nu spune decît $A=A$".

— Stai, opreşte-te! Cum adică, vrei să ne întoarcem, după atîţia ani, ca să afirmăm ceea ce nega Poincaré?

— Nu ca să afirmăm, căci părerea pe care am citit-o este, după cum aţi constatat, numai a unor anumiţi matematicieni, numiţi logisticieni şi a logicienilor. Ea nu-i generală; formaliştii şi intuiţioniştii, de pildă, o combat. Păcat că nu putem cuprinde deodată totul... că trebuie să ne oprim aici. Problema aceasta este aşa de tulburătoare...

— Şi cine ne opreşte să cuprindem totul, dar cu încetul, puţin cîte puţin? Desigur că nu acum, cînd am rămas singuri aici şi trebuie să ne mai ducem pe la casele noastre, dar altă dată!

— O! Dacă aţi vrea, aş fi foarte fericit să continuăm această discuţie al cărui obiect nici nu s-a conturat încă aşa cum trebuie!

— Eu nu am nimic contra, însă cred că cel mai bine ar fi să stăm de vorbă la mine acasă, ca să nu ne temem că am putea stingheri pe acei ce ar avea de lucru în această sală.

Într-o după amiază, de pildă, cînd nepotul meu ar fi liber, dacă îți convine și ție dragă Toader...

— Eu sînt oricînd dispus să vin, să hotărască Nucu ziua.

— Eu sînt liber în fiecare miercuri după amiază.

— Perfect, atunci să rămînă pe miercurea viitoare, numai că pun o condiție !

— Care ?

— Să fixăm dinainte subiectul ce-l vom ataca, nu de alta, dar nu-mi place poza vițelului la poarta nouă !

— Adică, să mă pregătesc cumsecade, că altfel... măcar că nu mai este amenințarea catalogului... Asta-mi place foarte mult, căci voi veni cu aceleași emoții ca atunci cînd avem de pregătit cîte un subiect pentru ședințele cercului nostru de elevi !

— Mă rog, acum e rîndul tău să fixezi subiectul și noi să ne supunem lui.

— Dacă-i vorba să o luăm cu încetișorul, atunci propun să lămurim între noi, și fără nici o pretenție, *problema fundamentelor matematicii*. Să începem cu apariția noțiunilor matematice, cum s-au impus ele și cînd a apărut necesitatea de *a le defini*. Problema aceasta a *definițiilor* este extrem de pasionantă. Ce părere aveți, dumneavoastră ?

— Că-i bine și să ne vedem sănătoși, miercuri după amiază !

II

ADÎNCURILE SE CER SCORMONITE

— Ştiind că ne vom întîlni astăzi, a început Nucu, de aseară gîndurile au început să scormonească prin trecutul acela îndepărtat în care te tot afunzi fără să-i dai de capăt. Îl căutam acolo pe omul care a înţeles întîia oară şi dintr-o dată că are o putere ascunsă în el, care-l îndeamnă să cerceteze mai adînc lucrurile ce-l înconjoară. Şi pînă atunci le văzuse, le simţise, le mirosise, le auzise sau le pipăise, dar abia în clipa aceea şi-a dat seama că el *priveşte lucrurile* şi *ştia* că le priveşte. S-a uitat la Soare nu ca altădată, fiindcă de-abia atunci a înţeles că din cauza lui este ziuă şi că după ce Soarele coboară şi se ascunde vine noaptea. A simţit dintr-o dată o mare şi necunoscută bucurie, alta decît aceea cînd mînca pe săturate sau îşi astîmpăra setea. El a fost poate şi acela care a făcut pentru întîia oară deosebirea dintre un *singur obiect* : o piatră, Soarele, Luna şi o *mulţime de obiecte,* stelele de pe cer, semenii lui, copacii, picăturile de ploaie ; dintre *o formă* şi altele. Din forma fulgerului a cunoscut *linia* dreaptă, — sau poate din tulpina copacilor şi a florilor ? — conturul Soarelui i-a arătat cum era un cerc, iar după aceea a obserat şi alte curbe pe lîngă care trecuse odinioară fără să le bage de seamă. Cine ştie cîtă vreme au trăit oamenii în această euforie provocată de trezirea conştiinţei şi de dorul de a cunoaşte ? Dacă acum vreo 40 000 de ani strămoşii noştri din Cro-Magnon depăşiseră etapa grijii de a căuta hrana şi aveau preocupări artistice înseamnă că omul pe care-l căutam eu astă noapte trebuie să se fi născut cu mult mai devreme, poate acum vreo 80 000 sau chiar 100 000 de ani.

— Cine poate ști ? Noi cunoaștem doar faptele petrecute cu cinci, șase mii de ani în urmă, cînd egiptenii, babilonenii, chinezii sau hindușii aveau școli.

— Știu, dar aceste date nu mă mulțumesc, fiindcă la acea epocă oamenii depășiseră de mult faza de inițiere în problemele matematicii, cunoștințele lor fiind bine precizate. Pe lîngă noțiunea de număr abstract ei aveau un sistem de numerație zecimal, ba și altul sexagesimal, cunoșteau geometrie, astronomie și chiar trigonometrie, căci puteau calcula panta unui plan înclinat, adică ceea ce numim azi cotangenta unui unghi ; puteau rezolva ecuații algebrice de gradul I și II și multe altele. Eu însă aș fi vrut să-l întîlnesc pe omul acela în care au licărit, la începutul începutului, primele noțiuni matematice și să-l întreb cum a reușit să definească numărul, mulțimea, șirul, punctul, dreapta, lungimea, aria, volumul ș.a.m.d. Pe el l-am căutat astă-noapte pînă am adormit.

— Bine că ai adormit, că altfel nu s-ar mai fi ales nimic din întîlnirea noastră. De altfel, e cam greu de închipuit că oamenii de atunci și-au bătut capul cu asemenea probleme. Judecînd după propria mea experiență din copilărie, cred că aceste întrebări s-au format pe încetul și tîrziu de tot. Cînd am învățat să număr, nu-mi amintesc. Părinții mei erau țărani, neștiutori de carte, dar n-aș putea spune că nu-i preocupau chestiunile matematice. Probabil că de la ei mi-a venit îndemnul să număr și să compar. Cea mai mare plăcere a mea era să măsor cu pasul cît de largă și de lungă era ograda, sau cu palma cît de mare era distanța de la un capăt al mesei la celălalt și tot așa înainte. Măsuram o lungime fără să știu ce este aceasta, fără să mai fi întrebat vreodată ce înseamnă *o lungime* și cred că dacă cineva mi-ar fi pus această întrebare mi s-ar fi părut fără sens. Nici mai tîrziu, cînd m-am dus la școală nu am știut ce este o lungime, o suprafață, un volum altfel decît prin calculele ce le executam în mod practic. Dealtfel, nici în cele mai vechi scrieri nu s-au păstrat *definiții*, ci numai reguli practice de calcul al ariilor, volumelor, capacităților etc. Student fiind, am aflat pentru întîia oară că întrebările puse de tine i-au preocupat pe geometrii greci, după ce ei au învățat *Aritmetica* și *Geometria practică* de la egipteni. De atunci aceste probleme m-au interesat foarte mult și i-am admirat

pe grecii care nu s-au mulțumit numai cu cunoașterea regulilor practice de calcul, ci au căutat să le pătrundă adîncul și să zăbovească asupra naturii noțiunilor folosite în calcule, întrebîndu-se de ce se procedează așa ?



Tales

— Da, îmi aduc aminte cum ne vorbeați la cercul nostru de matematici despre acei geometri greci care au trăit între secolele al V-lea și al III-lea î.e.n. Acum înțeleg eu de ce puneați atîta căldură și pasiune cînd pomeneați de Tales, Euclid, Arhimede și alți geometri greci, sau de Aristotel, care a pus la temelia gîndirii matematicei definițiile. Ne-ați explicat atunci că *definițiile* nu stabilesc *existența* lucrurilor, ci le *delimitează* ! Ne-ați mai spus că acesta este dealtfel și înțelesul cuvîntului grecesc „orismos", care a fost tradus în latinește prin „definitio". În fine, că pentru a defini o noțiune matematică trebuie analizate elementele simple din care este formată această noțiune.

— Îmi pare bine că nu ai uitat acele începuturi : atunci vorbeam eu, acum ți-a venit ție rîndul ! Ce-ai zice dacă ne-am opri să analizăm natura definițiilor din *Elementele* lui Euclid ? Multe dintre ele sînt *descrieri* în care se mai vădesc urme din experiența acelora care au construit templele, piramidele, sau care au împărțit loturile de pămînt. Iată și exemple : *suprafața* unui corp este limita care-l

separă de spaţiul înconjurător, *volumul* este locul pe care-l ocupă un corp în spaţiu"

— Da, dar mai sînt, stimate profesore, şi definiţii ca acestea: „Se numesc figuri, volumul, suprafaţa şi linia,



Arhimede

iar aceste figuri nu depind de corpurile cărora le aparţin". Aici apare foarte clar tendinţa de a scoate intuiţia din definiţia noţiunilor geometrice, astfel că acestea să poată fi privite ca figuri abstracte din spaţiu.

— Trebuie însă să precizezi la care spaţiu te referi? La *spaţiul fizic* în care se află corpurile reale, sau la acela *al formelor geometrice?* În ultimul caz, acesta nu s-ar putea cunoaşte decît după ce au fost recunoscute figurile geometrice.

— Mă bucur, Bădie, că ai pus mata această întrebare fiindcă ea ne obligă să aprofundăm *problema definiţiilor în matematică.*

— S-o aprofundăm zici? Şi cum am putea-o face mai înainte de a lămuri însăşi problema definiţiei matematicii?

— Dar cred că toţi trei ştim că cea mai veche definiţie a matematicii a fost dată de Aristotel. El a numit-o *ştiinţa cantităţii* şi această definiţie a dăinuit pînă în secolul al XIX-lea cînd Auguste Compte a mai modificat-o puţin şi anume afirmînd că *matematica este ştiinţa măsurătorilor indirecte*; astfel ea se arăta mai adecvată problemelor noi

pe care le trata atunci *Astronomia* şi *Fizica teoretică*. În prima fiind vorba numai de distanţa şi mărimea stelelor sau a planetelor din sistemul solar, în cealaltă şi de dimensiunile şi poziţiile atomilor. Curînd însă şi această definiţie s-a dovedit nepotrivită, căci apăruseră multe domenii noi care nu mai aveau nici în clin, nici în mînecă cu cantitatea şi cu măsurătorile ei, ci numai cu structuri, asta înseamnă cu anumite legi de compunere aplicate unor mulţimi de obiecte şi cu relaţiile dintre acestea: Teoria grupurilor, Teoria mulţimilor, Algebra logicii, Geometria proiectivă, Topologia ş.a.

— În acest caz s-ar potrivi definiţia dată în 1904 de matematicianul american Maxime Bochèr: „Dacă avem o anumită clasă de obiecte **şi** o anumită clasă de relaţii şi dacă singurele probleme pe care le cercetăm sînt: dacă grupuri ordonate din aceste obiecte satisfac sau nu relaţiile, rezultatul acestor cercetări se numeşte matematică".

— Însă pînă acum nici aceasta şi nici una dintre încercările ce s-au mai făcut ca să se găsească o definiţie potrivită pentru matematică nu a primit aprobarea unanimă a matematicienilor.

— Ba eu cunosc una care e acceptată de toţi, deşi e numită „butada lui Russell". O ştiţi şi dumneavoastră: „Matematica este singura ştiinţă în care nu se ştie niciodată despre ce se vorbeşte şi nici dacă ceea ce se spune este adevărat".

— Îmi place şi mie foarte mult. De aceea am şi copiat aceste rînduri care se referă la ea. Le am scrise în acest caiet şi vreau să vi le citesc. Sînt din conferinţa lui Lebesgue: „Butadă demnă de umorul englezesc, ascunzînd un adevăr adînc sub un rîs zgomotos. Un rîs care pare adevărat, dar care este totuşi învăluit într-o melancolie resemnată. Asta pentru că trebuie multă resemnare ca să accepţi să plăteşti siguranţa absolută, rupînd toate legăturile care unesc siguranţa şi adevărul, adică renunţînd să dai matematicii o valoare umană". (9, p. 112)

— Parcă ai găsit anume acest citat, Bădie, ca să-l am ca introducere la cele ce aş vrea să spun în legătură cu definiţia geometriei. După cum se ştie, există în geometrie două tendinţe opuse, una care continuă să vadă în concep-

tele abstracte ale geometriei originea lor intuitivă şi alta, care a rupt cu această tradiţie şi consideră noţiunile matematice ca pe nişte creaţii libere ale spiritului nostru, fără legătură cu realitatea înconjurătoare. Unde-i adevărul? Fiecare ideologie rămîne la părerea ei; ca să le înţelegem ar trebui să urmărim definiţiile de la care pornesc. Căci în structura acestor definiţii se află punctul nevralgic de la care au început multe scandaluri, care în loc să se aplaneze continuă să se înteţească.

— Măi băiete, dacă spui un lucru, du-l pînă la capăt. Doar de atîtea ori ne-am ciondănit noi pe chestia asta; şi mai ales acum, dacă te-ai lăudat că vom face filosofie, e nimerit să precizezi că te referi la cele două curente antagoniste, cunoscute în filosofie sub numele de *realism* şi *nominalism*. *Realiştii*, ca odinioară Platon, consideră că ideile abstracte au o realitate spirituală, că ele există în natură şi că omul n-are altceva de făcut decît să le descopere. În Evul Mediu faptul era exprimat în latineşte prin propoziţia: „universalia sunt realia" adică „noţiunile generale abstracte au realitate"; de aici vine numirea de *realişti*, cu toate că numai realişti nu-s! *Nominaliştii*, care se numesc azi *pragmatişti*, susţin că nu există decît lucrurile individuale, concrete, şi că din acestea s-au format noţiunile generale, abstracţiile, care sînt idei, adică numiri ale lucrurilor, aşadar, cuvinte. În latină se spunea: „universalia sunt nomine", de aici numirea de *nominalişti*.

— Habar nu am avut de asta, stimate profesore, şi vă mulţumesc pentru intervenţie. Acum îmi explic şi eu rostul expresiei „realism platonician" pe care am întîlnit-o şi o consideram fără sens. Acest punct fiind lămurit, cred că putem face primii paşi în domeniul definiţiilor matematice.

— Prea bine, s-o luăm atunci sistematic şi pe îndelete. Ştim de la Aristotel ce înseamnă a *defini o noţiune*. Ca şi Socrate sau Platon, el considera că în definiţia unei noţiuni se află însăşi *esenţa* noţiunii definite, exprimată direct prin *genul proxim* şi *diferenţa specifică*.

— Aşa-i numai în mod teoretic, căci practic sînt unele lucruri care au mai multe calităţi şi e foarte greu să te hotărăşti pe care să o alegi şi pe care să le laşi deoparte cînd vrei să stabileşti care să fie *diferenţa specifică*! Dar mai este

ceva : nu orice noţiune are un gen şi nu pentru orice noţiune se poate stabili *diferenţa specifică.* De exemplu, *categoriile* sau noţiunea de *existenţă* sînt aşa de largi, că nu mai admit un gen proxim. Vă întreb, cum putem defini noţiunea *drept ?* Este o noţiune indefinisabilă.

— Ai dreptate. Dar pentru aceste noţiuni definiţia se înlocuieşte prin descriere, caracterizare, comparaţie, deosebire, şi alte operaţii logice. Tocmai de aceea am insistat eu să o luăm sistematic. De pildă, geometrii greci au introdus, încă din secolul al V-lea, *definiţia prin construcţie.* Proclus arăta că atît Hipocrat din Chios, cît şi Oinopides cu elevii lui au stabilit existenţa obiectelor matematice, folosind construcţiile cu rigla şi compasul. Şi dacă nu puteau aplica această metodă, recurgeau la altfel de construcţii, numite *mecanice,* în care elementele pe care se bazau erau curbe construite prin puncte cum sînt conicele, spiralele ş.a., ba mai întrebuinţau încă un alt procedeu, numit *de alunecare.*

— Cred că acum am putea trece de la exemplele de definiţii geometrice la problema generală a definiţiei. Am să folosesc cartea lui A. Dumitriu *Mecanismul logic al matematicii* din care ai citit tu la Seminar data trecută şi pe care o am şi eu.

— Dar pe copertă văd că scrie „al matematicilor", de ce nu citezi, mata Bădie, titlul corect ?

— Pentru că eu sînt de părere că există o singură matematică deşi în această privinţă au fost şi mai sînt încă multe discuţii. La pagina 239 (8), autorul menţionează nu mai puţin de 10 tipuri de definiţii recunoscute de logicieni. Am să vi le citesc, cu titlu de curiozitate, fără să insist şi asupra comentariilor făcute : 1. *Definiţii nominale* — acestea oferă semnificaţia unui cuvînt care desemnează un concept. 2. *Definiţii reale* — exprimă caracterele esenţiale ale unui lucru, indiferent de concepţia metafizică care s-ar lega de aceste caractere esenţiale (Aristotel), sau dacă acestea ar fi numai semnele determinante ale unui concept (Kant şi Fries). 3. *Definiţii analitice* — sînt definiţiile unui concept dat, pe care îl exprimă printr-o judecată analitică. 4. *Definiţii sintetice* — sînt, după Kant, obiecte construite care stabilesc o nouă noţiune şi introduc pentru această noţiune un termen. 5. *Definiţii explicite* — acestea

reduc o noțiune la o combinație logică a altor noțiuni cunoscute. 6. *Definiții implicite* — cînd noțiunea ce trebuie definită nu este izolată într-un mediu, ci este implicată într-o combinație de idei. 7. *Definițiile prin uz* — introduc un concept prin indicarea întrebuințării lui. 8. *Definiția prin abstracție* a fost stabilită de Frege și Russell astfel: Oricare ar fi x și y, aparținînd unei clase oarecare a, egalitatea $\varphi(x)=\varphi(y)$ echivalează cu o relație oarecare R între x și y. 9. *Definiția prin corespondență* — este legată de corespondența ce se poate stabili între elementele care aparțin la două clase diferite a și b. 10. *Definiția prin recurență.*

— Definiția prin recurență ne este cunoscută, căci am discutat data trecută problema raționamentului prin recurență.

— Da, ea se exprimă prin egalitatea $x+n=[x+(n-1)]+ +1$, care definește numărul $x+n$ cînd a fost definită operația $x+(n-1)$. Putem adăuga, pe baza celor stabilite atunci, cînd ea nu este o definiție pur logică, deoarece conține o *inifnitate de definiții distincte*, fiecare dintre ele avînd sens numai atunci cînd este cunoscută aceea pe care o precede.

— Drept să-ți spun că 10 moduri de a stabili o definiție mi se pare cam mult.

— Ei bine, ca să nu ți se mai pară mult, află, dragă Teodor, că acestea sînt cele ce le-am putut enumera acum, fără să avem o pregătire prealabilă și că mai există altele despre care vom putea vorbi poate mai tîrziu, cînd vor putea fi înțelese. Totuși, ca să te împac, află că profesorul Dumitriu scrie în continuare că nu toți matematicienii au fost de acord cu această clasificare și dă ca exemplu pe Walter Dubislav care „reduce tipurile de definiție la cinci": 1. Definițiile sînt reguli de substituții ale unor semne prin altele. 2. Pot fi prescripții semnificative ale lucrurilor. 3. Definițiile pot fi construcții de concepții. 4. Explicații de semne. 5. Explicații de lucruri". Iar în lucrarea pe care Dubislav a publicat-o în 1931 cu titlul *Die Definition*, el observa că „despre ce este o definiție domnește o dispută nu numai între logicieni, dar și între matematicieni, fizicieni și juriști, pentru a nu mai vorbi și de alții care nu sînt de acord asupra acestui lucru".

3 — Licuricii din adîncuri 209

Foarte interesantă este încă concluzia prof. Dumitriu de la p. 242: „Nici Dubislav, cu tot efortul considerabil pe care l-a făcut într-o lucrare întreagă, nu izbuteşte să degajeze modul — sau modurile — de a defini, de cazurile în care se defineşte. El face o listă a ceea ce efectiv poate exprima o definiţie şi nu cum se construieşte o definiţie".

— Este tocmai ceea ce am spus şi eu mai înainte, fiindcă cinci sau zece sau cincisprezece moduri de a defini îmi arată cum nu se poate mai bine că logicienii nu au găsit calea pe care trebuia să o apuce, *ca să definească definiţia !*

— Cred că ar fi interesant să vedem cum a pus problema Poincaré. Citind în *Dernières Pensées* zilele trecute capitolul intitulat „Logica infinitului" am găsit: „orice definiţie este o clasificare. Ea separă obiectele care satisfac definiţia de acelea care nu o satisfac şi le aşază în două clase deosebite. Dacă ea procedează prin genul proxim, atunci şi diferenţa specifică se sprijină pe subdiviziunea genului în specii. Dar, o definiţie, ca orice clasificare, poate fi predicativă sau nu" (10).

— Stai, Bădie, că pomenind despre *definiţiile predicative sau nu,* dăm de bucluc ! Poincaré a introdus noţiunea de *clasificare predicativă,* avînd el anumite răfuieli cu partizanii teoriei mulţimilor.

— Te rog să mă lămureşti şi pe mine despre ce-i vorba, fiindcă unchiului tău văd că problema îi este cunoscută.

— Am să mă mărginesc acum numai la cîteva indicaţii generale, căci această problemă va fi discutată pe îndelete de îndată ce vom ataca teoria mulţimilor şi mai ales ne vom ocupa de logicism. Poincaré considera că dîndu-se o mulţime de obiecte diferite, aşezate după un anumit criteriu, clasificarea este *predicativă* dacă prin introducerea altor elemente noi nu se produce o perturbare în ordinea în care fuseseră aşezate elementele mai înainte, ci numai o deplasare, anume acea deplasare necesară ca să se poată intercala elementele apărute ulterior. Clasificarea însă este *nepredicativă* dacă norma după care au fost aşezate obiectele era de aşa natură încît, pentru a intercala noile elemente nu-i de ajuns o simplă deplasare, ci trebuie făcută o schimbare radicală în ordinea în care fuseseră aşezate elementele de mai înainte.

— Asta înseamnă că aceste două noţiuni *sînt contradictorii*, fiindcă numai un adjectiv *care exprimă* o noţiune *pe care o posedă* este *predicabil*. Unde a vrut să ajungă Poincaré cu această observaţie asupra definiţiilor ?

— Ei, tocmai aici e toată frumuseţea ! Mai întîi a stabilit cărei categorii îi aparţine cuvîntul *nepredicabil*. Dacă el ar fi nepredicabil, atunci el ar poseda calitatea pe care o exprimă, aşadar ar aparţine categoriei cuvintelor *predicabile* şi în acest caz, fiind *predicabil*, ar trebui să fie cum o arată cuvîntul *nepredicabil*. Aceasta este însă în contradicţie cu definiţia, care arată că tot ce nu este predicabil este nepredicabil !

— Va să zică, povestea cretanului mincinos apare şi în cadrul definiţiilor ?

— Da, şi prin acest paradox Poincaré a căutat să atragă atenţia celor ce se ocupau cu filosofia matematicii că una dintre cauzele de neînţelegere dintre ei provenea „din felul cum sînt concepute definiţiile". Pornind de la această observaţie, el le-a atras atenţia *că definiţiile nu împart mulţimea cuvintelor în două categorii distincte*, că nu există numai *două răspunsuri* certe : *da* şi *nu*, ci şi eventualitatea a cel puţin unei a treia categorii de cuvinte : *nici da, nici nu*, pentru care acele definiţii nu însemnau nimic. El a dat următoarele exemple de *definiţii false* : „cuvîntul nepredicabil este nepredicabil" şi „cuvîntul nepredicabil este predicabil", şi a arătat că definiţia „cuvîntul nepredicabil nu este nici predicabil şi nici nepredicabil", este adevărată.

— Tot despre definiţie am să vă citesc şi eu ceva din cartea lui Lèon Brunschviecg (11) : „Astăzi nu mai avem ambiţia să definim orice. Dar aceasta nu cum o credea Pascal, pentru că „împingînd cercetările mereu mai înainte se ajunge în mod necesar la cuvinte primitive pe care nu le mai putem defini", ci pentru că nu am ajuns să ne facem o idee clară despre *definiţie*. Noţiunea de definiţie, scria M. Russell nu-i definisabilă şi nici nu-i deloc o noţiune definită".

— În adevăr, dragă Toadere, şi această butadă a lui Russell rezumă perfect cele discutate de noi acum !

— Dacă v-a plăcut am să vă mai citesc ceva. Iată cum începe *Prefaţa* pe care a făcut-o Jacques Hadamard

la cartea scrisă de F. Gonseth *Fundamentele matematicii* (12), o carte ce îmi este nespus de dragă, şi pe care cred că Nucu a răsfoit-o.

— Nu, n-o cunosc.



Jacques Hadamard

— Ei, atunci data viitoare am să o aduc cu mine, dar acum ascultaţi: „Fiecare dintre concepţiile noastre principale, fiecare ramură a cunoştinţelor noastre trece în mod succesiv prin trei stări teoretice diferite: — starea teologică sau fictivă, starea metafizică sau abstractă şi starea ştiinţifică sau pozitivă. Astfel, a spus într-o zi Auguste Compte şi formula, rezistînd victorioasă încercării faptelor, a rezumat pînă aici, în mod fidel, istoria intelectuală a omenirii. Sîntem oare din întîmplare la o cotitură a acestei istorii? Căci iată un fenomen straniu, fără precedent în istoria gîndirii. O ştiinţă ajunsă în starea pozitivă este în curs de a-şi schimba drumul ca să revină la starea metafizică. Iar această ştiinţă este cea mai simplă, cea mai veche, cea mai perfectă dintre toate, anume matematica".

Cînd prietenul meu a terminat de citit am tăcut toţi trei. Simţeam parcă apăsarea stăruitoare a gîndirii, aidoma unui sfredel masiv care pătrunde într-o rocă să-i descopere metalul preţios. De aceea, m-am ridicat să fac o cafea, dar m-am îndreptat spre uşă căci am auzit soneria. Venise

profesorul Mihai Ursu, celebru neurochirurg, cu care legasem prietenie după operaţia care mi-a făcut-o în şira spinării, ca să-mi redea posibilitatea de a umbla.

— Aţi venit tocmai la timp, dragă doctore. Mă duceam să fac o cafea ca să-mi liniştesc prietenii după sfada la care am asistat pînă acum. Luaţi loc, vă rog.

— Sfadă ? Între cine ? Văd că sînteţi numai dumneavoastră aici şi nimic nu-mi arată că s-ar fi petrecut ceva neplăcut.

— Cu noi nu, dar de petrecut s-a petrecut ceva şi anume cu bazele matematicii.

— Nostimă glumă, profesore Toader. Şi o gust, fiindcă nu cunosc o ştiinţă mai solidă, mai sigură şi mai precisă decît matematica. Ea duce în spate toate ştiinţele, pînă şi medicina. De aceea, deşi o cunosc destul de puţin o admir foarte mult !

— Aveţi dreptate, cine nu ştie că cu dragostea nu-i de glumit ? Mi-a spus prietenul meu cu cîtă căldură i-aţi vorbit odată, cînd era internat la spitalul dumneavoastră, despre cursul de tomografie pe care l-aţi urmat la Paris. Ba, el este convins şi e foarte fudul că reuşita operaţiei lui se datoreşte în parte şi geometriei în spaţiu !

— Şi credeţi că nu are dreptate ? Tomografia este una dintre cele mai noi aplicaţii ale geometriei în spaţiu la medicină. Posibilitatea de a face radiografii executate pe secţiuni oricît de apropiate, în adîncul trupului omenesc şi la adîncimea care interesează, înseamnă un ajutor nepreţuit pentru cel ce operează. Iată de ce aş accepta orice motiv de sfadă între matematicieni, dar nu pe acela care mi l-aţi invocat.

— Dar nu-i deloc o glumă, stimate doctore. Dumneavoastră vă lăudaţi că ştiţi ce este matematica şi eu vă felicit sincer, fiindcă sînteţi unicul om care o poate afirma! Am să vă dovedesc aceasta citindu-vă cîteva rînduri dintr-o carte bine cunoscută pe care am adus-o cu mine. Se cheamă *Introducere în filosofia matematică*, a apărut în 1960 şi a fost scrisă de Şt. Körner, un renumit profesor de filosofie şi matematică de la Universitatea din Bristol. (13) „La întrebarea : ce este matematica ? *Logicistul* pur spune : este logică, *Formalistul* spune : mînuire de cifre în calcule,

Intuiţionistul spune: construcţii ale intuiţiei temporale, iar *Pragmatistul logic* spune: propoziţii pe care le abandonăm mai uşor decît pe cele de logică şi mult mai greu decît pe cele empirice. Să mai adăugăm că există şi poziţii intermediare. Progresul logicii matematice, de la Boole şi Frege încoace, nu a înpiedicat continuarea disputelor filosofice în jurul naturii matematicii". Acum mă credeţi că nu am glumit? Să nu vă închipuiţi că vreau să bîrfesc matematica, pe care o adorăm şi noi, dar aflaţi că pentru nimeni nu mai este un secret că nici un matematician nu va putea spune ce este *un număr întreg* — vă rog să reţineţi: un număr întreg precum 0, 2, 3, 100, şi nici un matematician nu vă poate garanta că în aritmetică — după dumneavoastră ştiinţa cea mai neîndoielnică — nu se va găsi cineva, vreodată, care să descopere o teoremă despre care să nu se poată afirma dacă e adevărată sau nu!

— Şi poate că n-ar fi lipsit de interes să mai adaug un exemplu pe lîngă acelea amintite de profesorul Toader, anume că în matematică există cazuri cînd 1 +1 nu fac 2.

— Asemenea cazuri le cunosc bine, tinere. La noi în medicină avem mereu de-a face cu faptul că 1 +1 =3 sau 1 +1 =4,5, iar uneori chiar 6.

— Aşa-i, dar în cazul la care am făcut eu aluzie: 1 +1 = 1, şi 1 +1 +1 +... rămîne egal cu 1 chiar dacă 1 s-ar repeta de un număr oricît de mare şi chiar nelimitat de ori. Faptul acesta este echivalent cu a afirma că o parte este egală cu întregul din care a fost luată!

— Văd că eşti un hîtru bun de glume şi că matematicienii nu duc lipsă de imaginaţie! Eu însă rămîn la părerea mea care, de altfel, m-a adus acum aici. Simţeam nevoia să discut cu un matematician şi să-i arăt admiraţia mea pentru această ştiinţă care a dat, zilele acestea, un nou exemplu de atotputernicia ei. Aş fi vrut să vin chiar a doua zi după ce s-a anunţat întoarcerea din Cosmos a primului nostru cosmonaut-cercetător, ing. Dumitru Prunariu, după 7 zile de zbor şi 122 de rotaţii în jurul Pămîntului, dar n-am putut. Oare fără ajutorul matematicii şi fără exactitatea calculelor ar fi fost posibil acest zbor, sau vizitarea Lunii, ori fotografiile trimise de pe Saturn? Ca un naiv m-am grăbit să vin şi să împărtăşesc această

bucurie a izbînzii cu noul meu prieten și cînd colo ce aud ? Că vă îndoiți de bazele matematicii !

— Îmi pare foarte rău, stimate doctore, că v-am deziluzionat. Sper că veți fi cu toții consolați după ce am să fac cafeaua. Dar să știți că decepția dumneavoastră mă răzbună într-un fel pe mine, vorba proverbului : „după faptă și răsplată".

— Acum chiar că nu mai înțeleg nimic, ce vreți să spuneți ?

— Desigur că habar nu aveți despre cele ce am tras eu atunci cînd eram internat la spital, deși am suferit o dezamăgire cam de aceeași natură cu a dumneavoastră. Trecuseră 8 zile de la operație și eram sigur că pot pleca acasă. Mă bucuram la acest gînd și plin de încredere cînd ați venit la vizită v-am spus ce plănuiam, iar dumnevoastră mi-ați tăiat-o scurt : De la pușcărie și de la spital nu se pleacă atunci cînd vrei, ci cînd ți se dă drumul ! Recunoașteți că pentru mine a fost o mare deziluzie, deși m-a încîntat răspunsul prin logica și noutatea lui. Pînă atunci eu nu alăturasem niciodată aceste două noțiuni. Acum mi-a venit și mie apa la moară, pe negîndite. Iar pînă cînd fac cafeaua am să-mi rog nepotul să repete în cîteva cuvinte cauzele ce au stîrnit zîzanie și neînțelegere între matematicieni.

— Cu multă bucurie ! Dar atunci am să trec peste discordiile iscate între matematicienii care se ocupă cu filosofia matematicii, de problema naturii raționamentului matematic, căci această problemă a format obiectul unei discuții mai vechi. Azi am constatat gravele neînțelegeri care au fost provocate de diferitele concepții legate de definiția unui obiect matematic. Am constatat că aceste concepții nu diferă numai din cauza diferitelor curente stabilite în cadrul fundamentelor matematice, curente pe care le-a menționat mai înainte profesorul Toader, ci, chiar de la un matematician, filosof sau logician, la altul. Am găsit astfel enumerate, o dată, zece moduri diferite de a înțelege definiția, altă dată numai cinci și am încheiat cu părerea lui B. Russell că : „Noțiunea de definiție nu-i definisabilă și nici nu-i deloc o noțiune definită". E de la sine înțeles cîtă importanță are această problemă, atunci cînd se dis-

cută fundamentele matematicii deoarece, *dacă nu se păstrează aceeaşi concepţie despre definiţie,* informaţia care se dă despre un obiect diferă de la un gînditor la altul !

— Am citit cîndva şi undeva, a adăugat profesorul Toader, „că acum îi este sortit şi matematicii, ca oricărei alte celule, să fie pusă la microscop, ca lumea să vadă toate slăbiciunile care pot exista la temelia ei. " Prin aceasta am vrut să vă arăt, stimate doctore, că discuţiile noastre au în ele ceva din atmosfera care domneşte şi în domeniul dumneavoastră.

După ce am băut cafeaua, prietenul meu Teodor a luat caietul lui cu note spunînd :

— Aş dori să şterg totuşi impresiile apăsătoare pe care vi le-am strecurat cu bîrfa noastră. În acest caiet am adunat multe gînduri scumpe mie şi dintre acestea am să vă citesc cîteva rînduri ale matematicianului francez H. Lebesgue, dintr-o conferinţă la care ne-am mai referit noi azi. (9, p. 120) E vorba despre încrederea în raţionamentul matematic şi deci în matematică. Iată ce spune el : „Această încredere este legitimă ? De unde vine certitudinea matematică ? Nu-i decît o slabă certitudine relativă, dar este cea mai absolută dintre certitudinile relative pe care omul le-a putut atinge. Ea vine de acolo că în matematică noi simţim mai bine ca oriunde limitele valabilităţii procedeelor noastre de cercetare şi a concluziilor noastre. Punînd într-o cuşcă un leu şi un iepure, nimeni nu va putea spune că $1+1=2$. Aşa că, aritmetica se aplică numai cînd se aplică, dar atunci se aplică întotdeauna în cazul în care noi o aplicăm, căci în celelalte nici nu ne vine tentaţia de a o aplica. La fel se petrece şi cu capitolele din matematica superioară ; îndată ce s-au constituit definitiv nu ne mai înşelăm asupra limitelor aplicaţiilor lor sau, cel puţin, dacă ne înşelăm, constatăm repede greşeala şi sîntem cu toţii de acord asupra ei, deşi atunci cînd s-au constituit acele capitole am fost mpărţiţi şi am ajuns la contradicţii".

— Consider, dragă doctore, că remarca lui Lebesgue, din cartea despre care am mai vorbit azi, v-a putut da o idee mai reală despre matematică decît aceea pe care v-aţi făcut-o ascultînd citatul lui Russell.

— Nu numai mai reală, dar şi în conformitate cu păree mele.

— Atunci, dacă sînteţi de acord, eu m-aş mai opri şi asupra unei observaţii a lui Gonseth, care deşi şi-ar fi avut locul în cadrul discuţiei noastre de azi, nu mi-a venit rîndul să o citesc.

— Dar cu siguranţă că dorim să-l ascultăm pe Gonseth. Iată observaţia lui privind ştiinţa matematică: „În esenţa ei, matematica nu-i decît un ansamblu de vederi şi de procedee schematice ale spiritului nostru, replică conştientă a activităţii inconştiente care creează în noi o imagine a lumii şi un ansamblu de norme după care noi acţionăm şi reacţionăm. Nu-i un edificiu ancorat undeva într-o absolută soliditate, ci o construcţie aeriană care rezistă ca prin minune: cea mai îndrăzneaţă şi neverosimilă aventură a spiritului", (p. 240)

— Observaţii în care vibrează frămîntarea de care este cuprins sufletul unui matematician, care caută să pătrundă în adîncul ştiinţei lui! Vă mulţumesc pentru această discuţie la care m-aţi făcut să iau parte.

— Ce să ne mulţumiţi! Dacă v-a plăcut şi v-ar interesa, vă invităm ca miercurea viitoare să luaţi parte la taifasul nostru. Care-i subiectul pe care-l vom ataca atunci, dragă Nucule?

— Dacă discuţia de azi s-a axat pe problema definiţiilor, cred că ar trebui să atacăm o noţiune care nu se poate defini şi nici nu ne putem apropia de ea decît cu multă sfială: *infinitul actual*.

— Infinitul actual? Există deci şi un infinit care a ieşit din uz, care nu mai este la modă?

— Asta veţi afla dacă veniţi miercuri!

— Cu alte cuvinte, îmi întindeţi o nadă?

— Desigur!

— Şi voi asista, cumva, la noi neînţelegeri, înfruntări, ba poate că şi la vreo bătaie?

— Altfel n-ar avea haz!

— Bine, dacă nu intervine vreun caz urgent, doresc să vin!

III

SPRE ULUITORUL INFINIT

— Infinitul dumneavoastră actual m-a ispitit toată săptămîna, aşa că am venit să aflu cum îl priviţi şi ce părere aveţi despre el, a spus doctorul Mihai Ursu cînd ne-am aşezat în jurul mesei, ca să discutăm.

— Atunci, drept introducere, am să vă pun o întrebare : — Cine a zis : „Infinitul ! Nici o altă problemă, nu a zguduit atît de tare spiritul omului" ! ?

— Cine altul dacă nu Hilbert, în 1921, a repezit Nucu răspunsul.

— Cum adică ? Pînă acum 60 de ani, infinitul nu a preocupat mai îndeaproape pe matematicieni, s-a mirat doctorul Ursu.



David Hilbert

— Ba da, infinitul a fost un punct de atracţie şi pentru matematicienii greci, chiar de dinaintea lui Aristotel. Numai că, pe la sfîrşitul secolului al XIX-lea, discuţiile în legătură cu problema infinitului au devenit foarte înverşunate, de unde şi izbucnirea lui David Hilbert, vizînd, bineînţeles, infinitul actual.

— Iarăşi *Infinitul actual ?* Mi-aţi promis o lămurire, sper că voi avea-o !

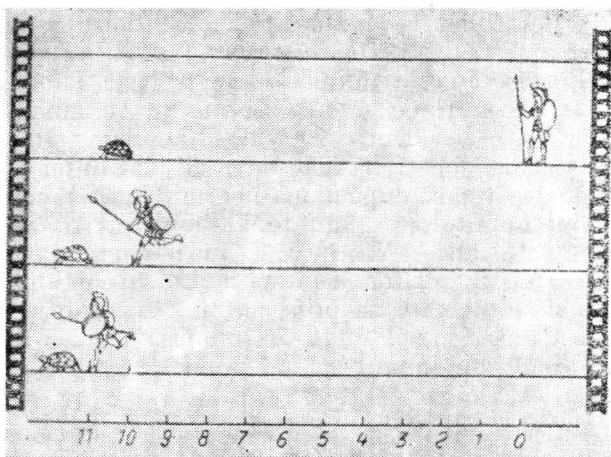
— Pe loc ! Pentru matematicieni, infinitul apare în două forme diferite : *infinitul potenţial* şi *infinitul actual. Infinitul potenţial* este infinitul care ne este familiar şi-l simţim aproape ori de cîte ori urmărim cu gîndul şirul numerelor naturale. După 99 vine 100, după 100 vine 101 şi aşa mai departe, oricît de mult am urmări acest şir de numere, ştim că după numărul ce ni-l imaginăm pentru o clipă vine un altul cu o unitate mai mult. *Infinitul actual* însă, e cu totul altfel. Mai întîi, că nu ni-l putem imagina. Este ca un vis îngrozitor, a întins multe capcane matematicienilor şi cei pe care i-a prins nu au mai putut scăpa de vraja lui. Ca să-l poţi înţelege, ar trebui să te ridici undeva, deasupra mulţimii infinite ca de acolo să o poţi privi *în toată totalitatea ei.*

— Am găsit în cartea lui Oskar Becker, *Fundamentele matematicii* (14), următoarea istorisire despre felul cum şi-au imaginat mulţimile *infinite-actual,* doi dintre cei mai vajnici apărători ai acestei noţiuni : „Dedekind spunea în legătură cu conceptul de mulţime infinită că el îşi reprezintă această mulţime ca un sac închis care ar conţine anumite lucruri determinate, dar care nu s-ar vedea şi despre care nimic nu s-ar şti, afară de faptul că ele există şi sînt determinate. Cîtva timp mai tîrziu, Cantor şi-a exprimat reprezentarea sa despre mulţimea infinită, îndreptînd în sus statura sa colosală şi descriind cu braţul ridicat un gest măreţ, apoi privind în gol, a spus : — O mulţime mi-o reprezint ca un abis".

— Dacă tot eşti cu cartea lui Becker în mînă, atunci te rog să ne citeşti şi un fragment din *Fizica* lui Aristotel, în legătură cu infinitul. El s-a simţit obligat să trateze această problemă şi, aş zice, a vrut să facă ordine cu ea, din cauză că filosofii greci dinaintea lui, folosind noţiunea de infinit

actual, ajunseseră la paradoxuri, adică la concluzii de-a dreptul monstruoase din punct de vedere logic.

— Cunosc şi eu cîteva dintre paradoxurile lui Zenon, de pildă al lui Ahile cel iute de picior, care nu putea ajunge broasca ţestoasă, ce era numai cu 100 de paşi înaintea lui, deşi alerga de 100 de ori mai repede, sau acela despre săgeată, care deşi porneşte din arc, stă pe loc...



Ahile
şi broasca ţestoasă

— Da, Zenon din Eleea a imaginat paradoxurile acestea ca urmare a concepţiei sale despre infinitul actual, speculînd ipoteza că spaţiul şi timpul se pot împărţi în mod nelimitat. Au mai existat şi alţi matematicieni greci din secolul al V-lea î.e.n., care au încercat să rezolve cuadratura cercului sau să determine volumul conului bazîndu-se pe operaţii care implicau acceptarea infinitului actual; ei au ajuns astfel la rezultate ce contraziceau principiile de bază ale matematicii. De aceea, Aristotel a combătut această atitudine, mai ales în *Fizica* sa, arătînd *că noţiunea de infinit* nu poate fi pusă alături de celelalte noţiuni matematice ca numărul, dreapta, planul etc.: „Infinitul există în potenţialitate, nu este permis însă a lua existenţa

potențială așa cum se face, de pildă, atunci cînd se consideră că un anumit material este o statuie în potențialitate pentru că va fi (odată și odată) statuie. Nu tot așa se va întîmpla cu ceva infinit în potențialitate: nu trebuie să presupunem că va fi infinit în act... nu este permis să considerăm infinitul ca ceva concret, determinat, așa ca, de exemplu, un om, o casă, ci așa cum se vorbește despre zi, despre sărbătoare, a căror existență nu are sensul de entitate, ci totdeauna sensul de ceva care apare și dispare și, chiar dacă este de fiecare dată limitat, totuși este ceva diferit și mereu altfel..." (14, p. 87)

— Aceasta este și concepția infinitului pe care a folosit-o Euclid în opera sa: o extrapolare naturală a experienței noastre ancestrale. Părerile lui Aristotel cu privire la evitarea infinitului actual din speculațiile matematice au dăinuit peste două milenii, fiindcă și azi există mulți matematicieni care-l reneagă. În secolul trecut a făcut-o Gauss, exprimîndu-și, în 1831, oroarea față de infinitul actual sub forma următoare: „protestez pentru folosirea mărimii infinite ca ceva definitiv, aceasta nu-i niciodată admisibil în matematică. Infinitul este numai un fel de a vorbi, adevăratul lui sens este o limită de care se apropie nedefinit anumite rapoarte, în timp ce altele pot crește fără limită".



Carl Friederich Gauss

— Şi cu toate aceste proteste, oricît de vehemente ar fi fost şi vor mai fi, după ce Georg Cantor a introdus în matematică *teoria mulţimilor*, infinitul actual, numit încă şi *transfinit*, a fost acceptat de majoritatea matematicienilor, iar Hilbert a declarat, plin de entuziasm: „nimeni nu ne va scoate din paradisul pe care Cantor l-a creat pentru noi". Dealtfel, Beth afirma că: „scopul principal al teoriei mulţimilor constă în a dezvolta o metodă care permite să se evalueze infinitul". Mai mult, el considera că Georg Cantor a prezentat „teoria mulţimilor ca pe o teorie matematică a infinitului actual". (7. p. 130) Şi, iată cum priveşte acad. prof. O. Onicescu rolul infinitului, în formarea noţiunilor: „Experienţa a adus înaintea noastră un număr oarecare de copaci, dîndu-ne astfel posibilitatea să creăm noţiunea de copac, care nu se rezumă însă la expresia copacilor determinaţi pe care i-am întîlnit. Această expresie implică şi capacitatea ca noţiunea să fie aplicabilă şi acelora pe care-i vom întîlni mai departe... Noţiunea cuprinde, ca un atribut esenţial, posibilitatea indefinită de a încorpora un număr nelimitat de indivizii ce îi reprezintă. Acest atribut al infinitului dă noţiunilor unitatea şi valoarea lor". De unde concluzia: „noţiunea de infinit posedă, în general, funcţia ontică de a uşura spiritului transformarea în noţiuni a datelor experienţei, adică trecerea de la un plan al gîndirii la altul". (15)

— Vă rog să-mi spuneţi ce înţelegeţi dumneavoastră prin *mulţime*, căci pentru mine cuvîntul are un înţeles vag şi intuitiv.

— La această întrebare vă vom răspunde treptat. Deocamdată pentru Georg Cantor o mulţime avea acelaşi înţeles vag pe care îl avem cu toţii, adică era „o reuniune de obiecte diferite numite elemente, care pot fi reale sau gîndite, ca, de pildă, flori, puncte, numere, cuvinte, fiinţe şi chiar mulţimi. Această definiţie dată de Cantor este numită *definiţia naivă* a mulţimii.

— De fapt, Cantor nici nu a dat o definiţie pentru mulţime căci el afirma că o mulţime este o reuniune, adică tocmai o mulţime. De la această pseudodefiniţie s-au şi iscat multe neînţelegeri, iar Poincaré nu a scăpat prilejul să mai arunce cîteva săgeţi.



Georg Cantor

— Cu toate acestea, Cantor a dezvoltat teoria mulţimilor într-un mod aşa de ingenios încît pînă la urmă a reuşit să cuprindă în ea toate ramurile matematicii ! Şi dacă ne-am întreba cum s-a putut întîmpla aceasta, răspunsul nu cuprinde în el nimic misterios, ci este cît se poate de simplu. Anume, că la baza teoriei mulţimilor se află ideea de a compara două mulţimi finite cu acelaşi număr de elemente şi de a stabili astfel o corespondenţă biunivocă, adică unu la unu între aceste elemente.

— Trebuie să recunoaştem că ideea a fost genială, fiindcă ea a dus la noţiunea de mulţimi echivalente, de aceea cred că e bine să clarificăm acest lucru printr-un exemplu. Să presupunem că avem o grămadă de 3 mere şi alta de 3 copii ; atunci fiecare copil poate lua cîte un măr. Dacă ar mai exista şi o grămadă de trei nuci, alta de 3 pere, corespondenţa biunivocă se păstrează, fiindcă fiecare copil poate lua din toate grămezile cîte un fruct, fără ca vreunul dintre ei să nu găsească sau să-i prisosească vreunul. Aceste 4 grămezi se numesc mulţimi echivalente între ele. Dar, nu ar mai exista această proprietate de echivalenţă dacă una dintre grămezi ar fi formată din 4 mere sau ar fi fost numai doi copii !

— Să mai amintim de încă două idei ingenioase introduse de Cantor şi anume acelea *de submulţimi ale unei mulţimi date* şi de *mulţime vidă*.

— Aveţi dreptate, aceste idei au condus la nişte rezultate surprinzătoare. Deocamdată însă să precizăm că prin submulţimea unei mulţimi date se înţelege o mulţime formată numai dintr-o parte a elementelor unei mulţimi. Rezultă de aici că două mulţimi sînt identice dacă fiecare dintre ele este submulţimea celeilalte. Prin mulţimea vidă, Cantor a definit mulţimea fără nici un element.

— Nostimă idee: mulţimea vidă, adică submulţimea fără nici un element?

— Da, poate fi considerată şi aşa şi tocmai de aceea submulţimile care cuprind cel puţin un element al mulţimii se mai numesc şi *submulţimi stricte*. Dar să reluăm noţiunea de echivalenţă a două mulţimi. Dacă le privim mai îndeaproape, corespondenţa biunivocă dintre elementele lor ne îndreaptă către noţiunea de număr cardinal. Acele mulţimi sînt echivalente care au acelaşi număr cardinal, adică aceleaşi număr de elemente. Iată o definiţie importantă şi cu viitoare consecinţe nebănuite.

— Desigur. Fiindcă pe Cantor nu l-au preocupat numai mulţimile finite, ci mai ales acelea infinite şi de aceea el a făcut un pas mai departe, considerînd corespondenţa biunivocă a două mulţimi infinite dintre care, pe una a ales-o să fie *şirul numerelor naturale*. Urmarea a fost de-a dreptul uluitoare, căci s-a aflat faţă în faţă cu infinitul actual!

— Nu înţeleg deloc cum şi de unde a apărut, aşa dintr-odată, infinitul actual?

— Exact atunci cînd s-a stabilit corespondenţa biunivocă dintre elementele mulţimii infinite a numerelor naturale şi elementele celeilalte mulţimi infinite. Să ne amintim de procesul petrecut în cazul mulţimilor finite. Înainte de a începe operaţia de corespondenţă, unu la unu, dintre elementele celor două mulţimi finite le-am privit pe acestea *în totalitatea lor*, ca şi cum ar fi fost două grămezi, puse fiecare în sac. Şi acum fiecare dintre grămezile infinite trebuie considerate, aşa cum îşi imagina Dedekind, „ca un sac închis care ar conţine anumite lucruri determinate, dar care nu s-ar vedea".

— Imposibil de imaginat, dar, cu oarecare bunăvoinţă, se poate înţelege. E foarte adevărat că dacă izbutesc să

închid toate, dar absolut toate numerele naturale într-un sac, şi n-am lăsat niciunul deoparte, mă aflu în faţa infinitului actual !

— Trebuie să recunoaştem că ideea lui Cantor a fost genială şi nu trebuie să ne mire că atîţia matematicieni s-au lăsat vrăjiţi de ea ! Mai ales cînd au cunoscut concluziile stabilite de Cantor !

— Şi care au fost acelea?

— Prima, că s-au putut ordona şi număra anumite mulţimi infinite, adică s-a ajuns la noţiunea de *număr cardinal al mulţimilor infinite* care se pot pune în corespondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor naturale. Este generalizarea firească a noţiunii de număr cardinal al mulţimilor echivalente finite.

— Aş vrea să văd, printr-un exemplu concret, cum poate fi stabilită corespondenţa biunivocă între şirul numerelor naturale şi elementele unei mulţimi infinite !

— Nimic mai simplu ! Să scriem pe rînd şirul numerelor naturale şi dedesubt să punem, unele sub altele, elementele mulţimii cu care vrem să stabilim corespondenţa :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4\ldots \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4\ldots \end{matrix}$$

— După cum vedeţi împerecherile $1—a_1$, $2—a_2$... pot merge la nesfîrşit, de unde şi concluzia că aceste două mulţimi sînt echivalente şi au acelaşi număr cardinal care, bineînţeles că nu mai este un număr finit, ci un număr transfinit, un număr care în nici un caz nu se aseamănă cu numerele întregi, fiindcă dacă ar fi întreg ar face parte din şirul numerelor naturale ceea ce nu se poate, fiindcă acestea au fost luate în întregimea lor. Acestui număr Cantor i-a dat numele de *alef zero* şi este numărul cardinal sau puterea şirului numerelor naturale infinite. O primă consecinţă este că mulţimea numerelor pare sau a celor impare este echivalentă cu mulţimea numerelor naturale. Aţi putea dumneavoastră, stimate doctore, să mi-o dovediţi?

— Nu m-am gîndit niciodată că ar fi aşa, dar din cele auzite acum, pare că m-aş putea încumeta şi la această operaţie ! Să scriu deci şirul numerelor naturale şi sub el

şirul numerelor perechi, în aşa fel încît să împerechez pe acelea ce sînt scrise unele sub altele:

1, 2, 3, 4...
2, 4 6 8...

Şi acelaşi lucru ar fi fost posibil dacă în şirul al doilea aş fi scris numerele neperechi.

— Aţi trecut foarte bine examenul, dar acum avem o pretenţie şi mai mare; puteţi considera că şi mulţimea numerelor fracţionare este tot aşa de mare ca a numerelor întregi?

— Asta nu! Egalitatea numerelor perechi sau a celor neperechi cu a numerelor întregi, bineînţeles cînd e vorba de mulţimea lor infinită a fost destul de simplu să mi-o imaginez. Dar acum, cînd mă gîndesc că numai între 1 şi 2 există o infinitate de numere fracţionare, cum s-ar mai putea împerechea aceste infinităţi de infinităţi cu singura infinitate a numerelor întregi?

— Şi totuşi nimic mai simplu, iată cum vom proceda, ca să putem cuprinde toate numerele fracţionare. Le aşezăm în aşa fel ca pe fiecare linie să se afle toate fracţiile care au acelaşi numitor:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1} \ldots \quad \frac{n}{1} \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2} \quad \ldots \quad \frac{n}{2} \ldots$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \ldots \quad \frac{n}{3} \ldots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots \quad \frac{n}{4} \ldots$$

— Sînteţi convins că am scris toate fracţiile ordinare posibile?

— Desigur, dar nu văd încă posibilitatea de a le număra, căci aici avem un tablou pătratic de numere, deschis spre infinit în două părţi şi nici într-un caz un singur şir.

— Ei, atunci hai să le punem într-un şir ! Aflaţi că putem face această scamatorie nu numai într-un singur fel, ci chiar în două moduri diferite. Am să vă arăt unul dintre ele. Să privim fracţiile aşezate pe diagonalele succesive pe care le vom trage începînd de sus, de la dreapta spre stînga. Avem astfel:

$$\left(\frac{1}{1}\right) \text{ apoi } \left(\frac{2}{1} \text{ şi } \frac{1}{2}\right) \text{ apoi } \left(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}\right) \ldots$$

— Observaţi poate vreo regulă de formare ale acestor mulţimi din paranteză?

— Am impresia că da. În prima paranteză e o singură fracţie, dar în a doua, ca şi în a treia, suma numărătorilor şi a numitorilor este aceeaşi, anume în paranteze a doua sumă este 3, iar în paranteza următoare 4 şi, prin urmare, în paranteza a n-a ea trebuie să fie $(n+1)$, adică aceea corespunzătoare fracţiilor:

$$\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3}, \ldots \frac{1}{n}.$$

Mai mult chiar, toate parantezele sînt formate dintr-un număr finit de termeni.

— Dacă aţi observat acest lucru înseamnă că jumătate din demonstraţie aţi şi făcut-o ! Dacă o şi terminaţi, atunci vă primim printre noi, fără nici un fel de protecţie !

— Da, aş putea candida la acest titlu, căci am impresia că acum putem scrie aceste paranteze unele după altele şi apoi, fiecărei fracţii din şir să-i atribuim un număr, acela corespunzător lui în şirul numerelor naturale, adică:

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{1}, & \frac{2}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{4}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{4}\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\ldots \end{array}$$

— Dar de acum înainte, dacă vă considerăm că faceţi parte dintre matematicieni, aveţi obligaţia să nu mai lipsiţi de la şedinţele noastre !

— Vă rog să nu mă flataţi, meritul nu este al meu, ci al dumneavoastră. Eu însă pot să adaug cu convingere că *numărul cardinal al fracţiilor ordinare este tot alef zero.*

— Cu alte cuvinte, acum puteți afirma că mulțimea fracțiilor ordinare este numărabilă, fiindcă toate mulțimile care pot fi puse în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale se numesc mulțimi numărabile.

— Iarăși mă puneți în încurcătură cu această nouă denumire. Trebuie să trag concluzia că există și mulțimi nenumărabile?

— Da, dar despre acestea vom vorbi mai tîrziu, cînd veți afla că-s și mai multe încă decît cele numărabile.

— Unchiul meu are dreptate, stimate doctore, căci cu mulțimea numerelor fracționare sau — ca să ne exprimăm mai corect — a numerelor raționale nu s-a încheiat încă socoteala mulțimilor numărabile. Mai înainte ca noțiunea de mulțime numărabilă să fi fost introdusă de Cantor, nimănui nu i-ar fi trecut prin minte să deosebească între ele sau să caracterizeze în vreun fel mulțimile infinite; acum însă aceste mulțimi au căpătat o caracteristică a lor și pot fi clasificate după acest specific.

— Ai accentuat un lucru foarte frumos, dragă Nucule. Anume acela pe care l-a afirmat mai înainte Beth, că prin teoria mulțimilor s-a găsit o metodă care permite să se evalueze infinitul — adică mulțimile infinite! Drept să-ți spun că de-abia acum am înțeles ce a vrut să spună Beth!

— Mă bucură mult, stimate profesore, că-mi spuneți aceasta... Și e binevenită observația dumneavoastră, căci la rînd vine acuma mulțimea *numerelor algebrice*.

— Numere algebrice? Iată, iarăși ceva nou pentru mine, despre care va trebui să-mi vorbiți, căci, după cum v-am prevenit, în admirația mea pentru matematică nu este implicată și documentarea.

— Nu mă sperie. Cred că în curînd vă va fi mai ușor să mînuiți dumneavoastră numerele algebrice decît ne-ar fi nouă să mînuim bisturiul, dacă ni l-ați pune în mînă! Numerele algebrice sînt acelea care corespund rădăcinilor unei ecuații algebrice, adică unei ecuații de forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_{n-1}x + a_n = 0,$$

unde atît n, cît coeficienții $a_0, a_1, \dots a_n$ sînt numere întregi.

— Atunci, printre aceste numere se află, alături de numerele întregi, și cele fracționare, toate numerele care sînt rădăcinile pătrate, cubice sau de alt ordin din nume-

rele întregi, căci cu asemenea numere ca $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{7}$... se exprimă rădăcinile ecuațiilor de gradul doi, trei sau mai mare, nu-i așa?

— Aveți dreptate, însă printre numerele algebrice sînt și alte numere care nu se pot exprima prin radicali, ca de pildă, rădăcinile unei ecuații de gradul cinci, șase sau oricît de mare ar fi un n finit ! Cantor a arătat că și această mulțime, infinit mai numeroasă decît acelea despre care am vorbit pînă acum, este numărabilă. Cum? E mai greu de arătat, de aceea vă rog să mă credeți pe cuvînt !

— Desigur că nu mi-aș permite să mă îndoiesc de cuvîntul dumneavoastră. Acest caz mi-a amintit de o anecdotă povestită mai de mult, de un alt pacient al meu, tot profesor de matematică. Faptele, spunea el, s-au petrecut în Franța, unde un nobil dorind să învețe matematica și-a tocmit un profesor. Dar oricîtă străduință își dădea profesorul, elevul nu înțelegea nimic. După cîteva lecții, disperat că nu-i poate trezi înțelegerea, profesorul a adăugat deznădăjduit : — Dar vă rog să mă credeți că este așa vă spun pe onoarea mea ! La această replică nobilul s-a înseninat la față și i-a răspuns ușurat : — De ce nu mi-ați spus asta de la început domnule, căci va-ș fi crezut, fără să mai fi fost nevoie de atîta osteneală din partea dv. Eu, neavînd printre strămoși — cel puțin după cîte știu, — nici unul care să fi prutat ranguri de noblețe, nu aș accepta adevărurile matematice decît după ce ar fi demonstrate, însă de data aceasta voi face o excepție : În schimb, ași dori să-i amintesc tînărului nostru că la începutul discuțiilor noastre s-a lăudat că-mi va dovedi că partea este egală cu întregul din care a fost luată, dar după ce am stabilit că mulțimea numerelor pare sau a celor impare este echivalentă cu mulțimea numerelor întregi—ceea ce dovedește tocmai această proprietate—, domnia sa nici nu a mai catadicsit să-mi atragă atenția asupra acestui fapt, ca și cum nici nu ar mai fi meritat să-l pună în evidență.

— Poate că nepotul meu nu a făcut-o anume, ca să aveți dumneavoastră singur bucuria descoperirii, mai ales că atunci cînd v-a amintit despre această posibilitate, nu prea erați dispus să o acceptați !

— Cred şi eu ! Care minte sănătoasă ar accepta că 3=5 ?!

— Dar nici nu este, fiindcă această proprietate apare numai cînd sărim gardul finitului şi trecem în grădina infinitului actual.

— Ba, dragă Nucule, am să te contrazic şi am să-ţi arăt un caz cînd partea este egală cu întregul chiar în domeniul nostru finit. Spune-mi, te rog, ce culoare are o bucată de hîrtie pe care o tai dintr-o foaie întreagă de hîrtie albastră?

— Umbli cu şmecherii, Bădie ! Crezi că dacă mi-ai luat apărarea, am să te acopăr? Desigur că şi bucata de hîrtie are aceeaşi culoare albastră, adică partea este egală cu întregul, dar numai dacă ne referim la *calitatea* hîrtiei de a fi albastră şi nu la *mărimea* bucăţii de hîrtie. Or, calitatea nu-i măsurabilă în unităţile cu care se măsoară cantitatea !

— Tot nepoţi să ai, ca să aibă cine te taxa de şmecher ! Dacă-i aşa poftim, arată-ţi tu neşmecheriile tale.

— Dacă vreţi, am mai putea zăbovi în această grădină a transfinitului. De pildă, am putea stabili şi că $1+1=1$ sau că $1+1+1...+1=1$, unde prin 1 vom înţelege noua unitate din domeniul infinit, numită de Cantor alef zero şi notată cu el cu $\aleph_0$.

— Aşadar, vrei să ne arăţi cum se pot aduna două mulţimi infinite numărabile şi cît face suma lor? Dacă mi-aţi fi pus această întrebare numai cu o oră mai devreme, cred că n-aş fi putut răspunde. Acum însă, sper că pot face eu însumi adunarea acestor două mulţimi infinite, folosind procedeul de corespondenţă biunivocă. Am să scriu cele două şiruri infinite unul sub altul şi după aceea am să adun succesiv termenii lor :

$$a_1, \quad a_2... \quad a_n...$$

$$b_1, \quad b_2... \quad b_n...$$

Prin adunare rezultă :

$$a_1+b_1=c_1, \; a_2+b_2=c_2...$$

Se obţine astfel un şir infinit tot numărabil:

$$c_1+c_2+...c_n+...,$$

al cărui număr cardinal este tot alef zero, aşadar

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0 \; !$$

Drept să vă spun că am început să mă minunez eu singur de mine ! Iată-mă în stare să dezleg misterul pe care săptămîna trecută l-am considerat tot aşa de imposibil ca şi afirmaţia că partea este egală cu întregul, acela că $1+1=1$!

— Oare n-ar fi cazul să încercaţi şi demonstraţia părţii a doua, anume că $1+1+1...+1=1$?

— Să încerc ! Cred că voi repeta exact procedeul pe care l-am folosit cînd am găsit suma a două mulţimi numărabile. Va trebui să scriu toate şirurile numărabile unele sub altele şi să adun pe coloană, termen cu termen, elementele de acelaşi ordin din şirurile respective. Astfel am să obţin un nou element care face parte din şirul sumă, adică scriem mai întîi şirurile:

$$a_1, a_2, .. \; a_n ...$$

$$b_1, b_2 ... \; b_n ...$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$p_1, p_2 ... \; p_n ...$$

Apoi prin adunare avem:

$$a_1+b_1+...+p_1=r_1$$

$$a_2+b_2+...+p_2=r_2$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$a_n+b_n+...+p_n=r_n$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

De aici rezultă şirul numărabil $r_1+r_2+...r_n+...$ care are drept număr cardinal tot pe alef zero !

— Perfect ! Şi fiindcă sîntem la capitolul năzdrăvăniilor, n-ar fi rău să vă mai arăt una: După cum ştiţi, în domeniul finitului numerele se împart în *pare* şi *impare*, trecîndu-se de la o categorie la alta, prin adăugarea unei unităţi. Dacă 3 este impar, $3+1=4$ este par. Dar în domeniul infinitului această proprietate nu mai există căci $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$.

— Mă gîndesc că n-ar fi exclus, a intervenit profesorul Toader, că tocmai această proprietate care-l deosebește pe $\aleph_0$ de numerele întregi să-l fi făcut pe Cantor să înlocuiască denumirea de *număr cardinal al unei mulțimi infinite* numărabile cu aceea de *putere*. Și această dedublare mă duce cu gîndul la greci care și ei, tot dintr-un motiv filosofic, l-au deosebit pe unu de celelalte numere întregi, numindu-l *unitate* și nu *număr*.

— Ca unitate el apărea diferit de celelalte numere prin faptul că era singurul care avea proprietatea de a forma celelalte numere. În Europa, ideea că unu nu-i număr, ci unitate, a dăinuit pînă în secolul al XVI-lea și nu-s puține cărțile de aritmetică de atunci în care șirul numerelor naturale începea cu 2 ! Abia după multe și îndelungate discuții a fost acceptată părerea că și 1 este număr.

— Cred că ar mai trebui să accentuezi, dragă Teodor, că în aritmetica transfinită alef zero este considerat de Cantor ca număr întreg, desigur un întreg transfinit !

— Asta am înțeles-o eu, după cum v-am mai spus, dar am o nedumerire : vorbiți mereu de *mulțimi numărabile* ; există oare și altfel de mulțimi infinite decît numărabile și dacă sînt, cum le putem deosebi de cele numărabile ?

— Da, există și mulțimi infinite de numere care *nu-s numărabile*, cu alte cuvinte în infinitatea lor ele cuprind mai multe elemente decît acelea pe care le are o mulțime infinită numărabilă. Aceste mulțimi nenumărabile se deosebesc de cele numărabile prin faptul că numai *o submulțime a lor* se poate pune în corespondență biunivocă cu o mulțime numărabilă, iar această operație se poate face *numai într-un singur sens*, nu și invers.

— Practic însă, nu-mi pot imagina o astfel de mulțime. Una care să cuprindă mai mult decît toate numerele întregi, fracționare și algebrice?

— Vă înșelați, stimate doctore, *mulțimea numerelor reale* vă este tot așa de binecunoscută ca termometrul sau seringa, ca să nu mai vorbesc de bisturiu. Nu-mi închipui că ați putea afirma că n-ați fi auzit de π?

— Cel de la lungimea cercului?

— Exact, sau încă de „e", cel ce reprezintă baza sistemului de logaritmi naturali, sau de numerele înscrise într-o

tablă de logaritmi, cu care cred că și acum mai aveți uneori de-a face, ori de numerele prin care se exprimă valorile funcțiilor trigonometrice, de pildă sin $3°20'=0{,}0581$ sau tg $59°46'=1{,}716$. Aceste numere, pe care le-am exprimat sub formă de fracții zecimale numai în mod aproximativ, fac parte din mulțimea numerelor reale. Tot prin fracții zecimale infinite se exprimă și $\pi=3{,}1415...$ sau $e=2{,}7182...$ Dacă am considera o dreaptă pe care să stabilim o origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură, pe ea putem nota, alături de numerele întregi 0, 1, 2, 3... toate aceste numere reale. Operația vă este bine cunoscută și dumneavoastră în medicină atunci cînd stabiliți diferite grafice.

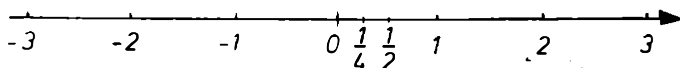


Fig. 1

— Fiindcă ai vorbit de sens, dragă Nucule, de cel pozitiv și de cel negativ, e bine să atragi atenția că numerele cu abscise negative trebuie așezate la stînga lui zero. Prin urmare, că în această reprezentare a numerelor pe dreaptă vei folosi numerele algebrice pozitive și negative,

— Aveți dreptate, dragul meu profesor. Noi ne mărginim la segmentul 0, 1 și îl împărțim mai întîi în jumătate și apoi succesiv în alte jumătăți. Se ajunge astfel de la punctele de abscisă 1 la acelea cu abscisele $\frac{1}{2}=0{,}5$, $\frac{1}{4}=0{,}25...$ ș.a.m.d. Continuînd diviziunea la nesfîrșit între punctele $\frac{1}{2}=0{,}5$ și $\frac{1}{4}=0{,}25$, găsim că între 0,5 și 0,25 există o infinitate de puncte ale căror abscise vor fi de forma 0,4123..., 0,3179... ș.a.m.d. Putem să ne închipuim că întregul segment 0, 1 este împărțit într-o infinitate de părți infinit de mici. Se obțin astfel punctele ale căror abscise reprezintă toate numerele reale cuprinse între 0 și 1. Iată un exemplu de o infinitate de puncte care *nu mai formează o mulțime numărabilă.* Vreau să spun că mulțimea punctelor aflate pe segmentul 0, 1 este mai mare

decît întreaga mulţime infinită a numerelor întregi de pe această axă. Cantor a dovedit într-un mod foarte intuitiv şi ingenios, aşa cum sînt de altfel toate demonstraţiile lui, că această infinitate a numerelor reale cuprinsă între 0 şi 1 întrece pe aceea a numerelor naturale, adică *nu mai este numărabilă,* folosind metoda „reducerii la absurd". Aşadar, el a presupus că mulţimea este numărabilă şi a început să scrie aceste numere reale dintre 0 şi 1 sub forma următorului şir :

1 : $0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$

2 : $0, b_1b_2 \ldots b_n \ldots$

3 : $0, c_1c_2 \ldots c_n \ldots$

. . . .

n : $0, n_1, n_2, n_3 \ldots$

Apoi a arătat că o asemenea numerotare nu este posibilă, căci ea *nu cuprinde toate numerele ce se află între 0 şi 1.* În adevăr, el formează numărul : $0, a_2b_1c_4 \ldots$ şi dovedeşte că acest număr, deşi este cuprins între 0 şi 1 *nu figurează în şirul* pe care l-a scris el, deoarece se deosebeşte de primul număr prin *prima cifră de după zero,* care aici este a_2, iar în primul număr este a_1 ; de al doilea număr se deosebeşte prin cifra a doua de după zero ; b_1 în loc de b_2, ş.a.m.d. În felul acesta, Cantor a demonstrat că mulţimea infinită a numerelor reale cuprinse între 0 şi 1 *nu poate fi numerotată,* adică este mai mare decît mulţime infinită a numerelor întregi. Numerele reale au deci o putere mai mare decît alef zero şi fiindcă aceste numere au fost puse în corespondenţă cu mulţimea continuă a punctelor de pe o dreaptă, Cantor a dat acestei *puteri* numele de *puterea continuului* şi a notat-o cu litera „C".

— Bine, dar dacă mulţimea numerelor reale, adică a punctelor de pe o dreaptă are puterea continuului, atunci ce putere au mulţimile punctelor dintr-un plan sau ale acelora din spaţiu, care evident că sînt cu mult mai numeroase?

— Am să vă răspund, stimate profesore, la această întrebare tot cu o întrebare. Dacă iau două segmente *AB*

și *CD* unul de 1 cm, iar celălalt de 1 m, pe care din ele se găsesc mai multe puncte?

— Bravo, Nucule, mi-ai dat cel mai frumos răspuns posibil. E ușor de dovedit că ambele segmente au același număr de puncte. Pentru aceasta n-am decît să duc dreptele *AC* și *BD* care se intersectează în punctul *O* și să rotesc în jurul lui *O* dreapta *AC*. Ea va parcurge deodată segmentele *AB* și *CD*, întîlnind cîte un punct de pe dreapta *AB* și de pe dreapta *CD*.

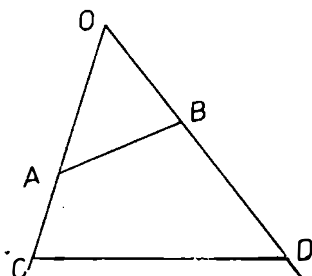


Fig. 2

— Vedeți că nu m-ați prins cu mîța în sac ca altă dată? Folosind un raționament asemănător, Cantor a arătat că sînt tot atîtea puncte pe o dreaptă ca și într-un plan sau în spațiul nostru cu trei dimensiuni, ba chiar și într-un spațiu cu oricît de multe dimensiuni, numai în număr finit.

— Atunci „C" este cel mai mare număr transfinit ?

— Nu ! Cantor a dovedit că există și alte numere transfinite, mai mari. El le-a numit alef unu, alef doi,... $\aleph_1, \aleph_2 \dots \aleph_n$!.

— Mă tem că prin acest răspuns ne-ai adus la marginea prăpastiei. Cum se poate împăca șirul infinit de alefi cu faptul că noi nu cunoaștem decît numai două feluri de mulțimi infinite, mulțimea numărabilă și aceea nenumărabilă?

— Și de data aceasta salvarea ne vine tot de la Cantor, cu rezultatele pe care le-a stabilit în aritmetica lui transfinită. Mă refer la numărul cardinal al mulțimii tuturor submulțimilor unei mulțimi date. Ca să urmărim mai ușor acest calcul, să alegem drept exemplu mulțimea finită *m* : (1, 2, 3) cu trei elemente și să formăm toate submulțimile ei. Numărul cardinal al ei este 3. Din ea se desprind trei submulțimi cu cîte două elemente : (1, 2), (1, 3), (2, 3) și tot trei submulțimi cu cîte un element (1), (2), (3). Dacă la acestea mai adăugăm mulțimea vidă (0) și însăși mulțimea considerată (*m*) s-a format mulțimea *M*

a tuturor submulțimilor mulțimii *m*, anume: *M* : (1, 2, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1), (2), (3), (0).

— E clar că numărul cardinal al lui *M* este mai mare decît al mulțimii inițiale *m*. Cantor a dovedit că el este întotdeauna egal cu 2^n dacă *n* este numărul cardinal al mulțimii considerate. În cazul nostru el este $8=2^3$. Nu-i așa, Nucule ?

— Ba da, Bădie, și e interesant de remarcat că această operație se poate continua, adică pornind acum de la mulțimea *M*, să formăm o altă mulțime M_1 a tuturor submulțimilor mulțimii *M*, ș.a.m.d.

— Deși exercițiul acesta ar fi îmbietor atunci cînd ești de unul singur, acum cred că ne-ar trebui prea multă vreme ca să stabilim aici cele $2^8=256$ submulțimi formate din mulțimea *M*, așa că sînt de părere să ne lăsăm păgubași.

— Ba, eu, nu jur că odată, cînd voi fi prea obosit de la o operație, n-am să încerc să mă joc cu aceste mulțimi, care-mi par tot așa de odihnitoare ca și jocul cu cuvinte încrucișate !

— Dar procedeul de a forma în mod succesiv din mulțimea *m* pe *M* apoi pe M_1, M_2... nu are sfîrșit și vom ajunge astfel la mulțimile ale căror puteri sînt nesfîrșit de mari.

— Da, dar toate aceste mulțimi au ca numere cardinale numai numere finite, care figurează undeva în șirul infinit al numerelor naturale !

— Ai dreptate, acest număr cardinal al mulțimilor tuturor submulțimilor unei mulțimi finite, oricît de departe ne-am duce cu formarea lor, rămîne totuși un număr întreg finit.

— Atunci, hai să-l urmărim pe Cantor cînd în locul unei mulțimi finite consideră o mulțime infinită numărabilă *T*, adică de putere $\aleph_0$. Dacă formăm mulțimea tuturor submulțimilor acestei mulțimi numărabile *T*, se obține o mulțime T_1 a cărei putere este un număr întreg transfinit mai mare decît $\aleph_0$, numit de Cantor *alef unu* ($\aleph_1$), care poate fi exprimat prin $\aleph_1=2^{\aleph_0}$.

— Și cred că la fel găsim mulțimea T_2 a submulțimilor T_1?

— Da, iar puterea mulțimii T_2 a fost numită de Cantor $\aleph_2$.

— Atunci de aici, şi în acest mod, a stabilit Cantor şirul alefilor: $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$? Admirabil rezultat! Îi dau dreptate lui Hilbert să fi vorbit de *Paradisul* lui Cantor şi sînt convins că el a păşit în această lume a infinitului!

— Convingerea dumneavoastră este întemeiată, şi dacă unchiul meu ar vrea ne-ar putea povesti cîteva amănunte din viaţa acestui matematician care a suferit mult, fiindcă nu a fost înţeles. El o cunoaşte bine.

— Nu-i timpul potrivit, acum ar fi mai bine să ne citeşti tu ceva din articolul scris de Cantor despre *infinitul actual*, pe care-l numea *infinit propriu-zis*, ca să-l deosebească de *infinitul potenţial — impropriu* — pentru el.

— Cu plăcere. Articolul a apărut în 1883 şi se află, în parte, în cartea ce o avem aici pe masă (14, p. 315). Bineînţeles că am să aleg numai alineatele strîns legate de cele ce am discutat acum: „...eu introduc în consideraţiile mele idei aparent străine. Căci este vorba de o lărgire, respectiv continuare a şirului de numere întregi reale, dincolo de infinit; oricît ar părea de îndrăzneţ acest lucru, eu îmi exprim totuşi nu numai speranţa, ci convingerea fermă că această lărgire va trebui să fie privită, cu timpul, ca ceva absolut simplu, adecvat, natural... noi distingem două forme în care a apărut infinitul matematic... În prima formă, ca infinit impropriu, el se prezintă cu *un finit variabil*; în cealaltă formă, în care îl numesc infinit propriu-zis, el apare ca un infinit absolut determinat. Numerele întregi reale infinite, pe care le voi defini în cele ce urmează şi către care am fost condus încă de mulţi ani, fără să am conştiinţa clară că în ele posedăm numere concrete de semnificaţie reală, nu au absolut nimic comun cu prima dintre cele două forme, cu infinitul impropriu;... ele aparţin formelor şi efectelor infinitului propriu-zis".

— Rîndurile acestea sînt zguduitoare, am avut senzaţia că mă aflu chiar în taina procesului de creaţie: cînd spune „fără să am conştiinţa clară..."

— Sau cînd prevede că „această lărgire va trebui să fie privită, cu timpul, ca ceva absolut simplu", ceea ce, de altfel, s-a şi întîmplat! Dar hai, nepoate, mergi înainte.

— „Cele două *principii de generare*, cu ajutorul cărora sînt definite noile numere determinat infinite, sînt de aşa natură încît prin influenţa lor combinată poate fi stră-

punsă orice îngrădire în formarea conceptului de număr real; din fericire lor li se opune un *al treilea principiu* pe care îl numesc principiul de *inhibiție* sau de *îngrădire*, prin care procesului de formare absolut nesfîrșit i se impun anumite îngrădiri succesive, așa încît noi obținem intervale naturale în șirul absolut infinit al numerelor întregi reale, intervale pe care eu le numesc *clase de numere*.

Prima clasă de numere (I) este mulțimea numerelor întregi finite, 1, 2, 3, 4,... *m*,... ; după ea urmează a *doua clasă* de numere (II), constînd din anumite numere întregi infinite care se succed într-o anumită ordine; numai după ce se definește a doua clasă de numere se ajunge la *a treia*, apoi la a patra etc. Introducerea noilor numere întregi mi se pare a fi mai întîi de cea mai mare însemnătate pentru dezvoltarea și precizarea *conceptului de putere*. Fiecărei mulțimi bine definite i se atribuie o anumită putere, iar la două mulțimi li se atribuie aceeași putere, dacă ele se pot asocia biunivoc, element cu element. La mulțimile finite puterea coincide cu numărul de elemente, deoarece, astfel de mulțimi oricum ar fi ordonate au, după cum se știe, același număr de elemente. La mulțimile infinite, dimpotrivă, pînă acum n-a fost vorba, în genere, nici în lucrările mele, nici în altă parte, de un *număr precis* definit al elementelor lor; totuși, li se putea atribui și lor o anumită putere, complet independentă de ordonarea lor".

— Ce captivantă expunere ! Prin ea am avut un tablou rezumativ al celor discutate azi și chiar mai mult: mie mi-a precizat un lucru care m-a impresionat, *acela că la mulțimile infinite nu poate fi vorba de stabilirea unui număr precis de elemente* ! Vedeți dumneavoastră, care sînteți obișnuiți cu aceste probleme, le priviți ca naturale și aproape că nici nu vă mai gîndiți să le puneți în evidență, dar mie, care pînă acum mi-au fost străine, fiecare amănunt nou îmi provoacă aceeași tresărire de uimire ca și atunci cînd găsesc, într-o galerie de tablouri, unul care-mi țintuiește privirea. Iertați-mi întreruperea, dar simțeam nevoia acestei destăinuiri, înainte de a asculta mai departe, adică de a gusta apa chiar de la izvor !

— Ba, ea a fost bine venită și cu tîlc pentru noi ! Mai ales pentru cel ce ne citește, căruia i-am dat libertatea alegerii textului.

— Da, norocul meu este că am citit de mai multe ori acest articol şi nu-mi este greu să trec peste părţile ce ne-ar complica existenţa ! Acum însă merg în continuare: „Cea mai mică putere a mulţimilor infinite, după cum era uşor de justificat, trebuia să fie atribuită acelor mulţimi care se pot asocia biunivoc *primei clase de numere* şi de aceea să aibă aceeaşi putere cu ea. Dimpotrivă, pînă acum a lipsit o definiţie, tot aşa de simplă, firească pentru *puterile superioare*. Clasele noastre de numere menţionate mai sus, ale numerelor întregi reale determinat—infinite, se dovedesc acum reprezentanţi naturali, manifestîndu-se într-o formă unitară, ai puterilor mulţimilor bine definite, ordonate crescător în succesiunea regulată. Eu arăt în modul cel mai precis că puterea celei de-a doua clasă de numere (II) nu este numai diferită de puterea primei clase de numere, ci că ea este şi în realitate puterea imediat superioară: de aceea, putem să o numim *a doua putere* sau *puterea clasei a doua*. La fel, a treia clasă de numere dă definiţia celei de-a *treia puteri* sau *puterii clasei a treia* etc."

— Aici am găsit o expresie care n-am înţeles-o deloc: „mulţimi bine definite, ordonate crescător în succesiunea regulată". Ce înseamnă asta ?

— Asta înseamnă introducerea la o nouă surpriză ! Pe lîngă *numerele cardinale transfinite*, Cantor a introdus şi *numerele ordinale transfinite*, şi de aceea aici vom întrerupe lectura, ca să discutăm ceva despre *numerele ordinale*.

— După cum ştiţi, în aritmetica obişnuită, alături de numerele cardinale adică întregi şi naturale: 1, 2, 3... se întîlnesc şi numerele ordinale, prin care se precizează locul pe care-l ocupă un obiect care se află într-un şir de obiecte, aşezate într-o anumită ordine: primul, al doilea, al treilea ş.a.m.d. Cantor a extins această noţiune de număr ordinal finit şi la numerele sau puterile transfinite. Aşa că, alături de puteri sau *numere cardinale transfinite* apar şi *numerele ordinale transfinite*. Însă, de data aceasta, lucrurile se complică: în cazul mulţimilor finite, numărul cardinal se confundă în valoare cu cel ordinal, fiindcă, după cum s-a exprimat Cantor: „la mulţimile finite puterea coincide cu numărul elementelor, deoarece astfel de mulţimi, *oricum ar fi ordonate*, au acelaşi număr de elemente"; în cazul mulţimilor infinite, numerele cardinale transfinite

nu mai sînt egale cu acelea ordinale transfinite. Ca să fie mai clar, luăm un exemplu: Considerăm trei mulţimi infinite ordonate, bine cunoscute nouă:

1. mulţimea numerelor naturale: 1, 2, 3... n,... (m_1)
2. mulţimea numerelor întregi: 0, 1, 2, 3,... n,..., (m_2)
3. mulţimea numerelor raţionale: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,..., $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$... ... $\frac{p}{q}$ ... (m_3).

Toate aceste mulţimi au acelaşi număr cardinal, anume alef zero ($\aleph_0$), dar nu au şi aceleaşi numere ordinale transfinite!

— Eu aş vrea să insist şi asupra noţiunii de *ordonare*, care este intim legată de numărul ordinal al mulţimilor infinite. Se spune că o mulţime este ordonată atunci cînd între elementele ei există o *relaţie de ordine*, notată de obicei prin semnul „mai mic" ($<$). Această relaţie de ordine se exprimă prin următoarele trei condiţii pe care trebuie să le îndeplinească trei elemente oarecare x, y, z, din mulţimea m, notată în acest caz $(m, <)$:

1. Dacă x nu este mai mic decît y, atunci rezultă $x=y$ sau $y<x$.
2. Dacă x nu este egal cu y, atunci rezultă $x<y$ sau $y<x$.
3. Dacă $x<y$ şi $y<z$ atunci rezultă $x<z$.

— Dacă la a este condiţii se mai adaugă şi condiţia suplimentară, anume că, în toate submulţimile n nevide din m *să existe un cel mai mic element* x, în aşa fel că pentru orice alt element y din n să avem $x<y$, atunci se spune că mulţimea este *bine ordonată*.

— Dar acestea sînt condiţiile ca să existe un şir ordonat!

— Ai dreptate, Bădie. Cantor a generalizat această numire dînd-o la mulţimile infinite bine ordonate, observînd că fiecare parte a unui şir este tot un şir. În plus, el a definit *asemănarea* a două mulţimi bine ordonate, sau şiruri $(m, <)$ şi $(m', <)$, anume acele şiruri sînt *asemenea* în care se poate stabili o corespondenţă între elementele lor, care să păstreze *ordinea*.

— Asta vrea să însemne că dacă în mulţimea m avem $x<y$ şi acestor două elemente din m le corespunde în mulţimea m' elementele x' şi y', atunci şi $x'<y'$?

— Adevărat. Această relaţie este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Dacă numim *NO* (*m*, <) familia tuturor mulţimilor bine ordonate asemenea cu (*m*, <), acest număr *NO* (*m*, <) se numeşte ***numărul ordinal al mulţimii m***. Dacă se dau două mulţimi bine ordonate, pentru care *NO* (*m*, <)=*NO* (*m'*, <), atunci aceste două mulţimi au şi acelaşi număr cardinal. Dar reciproca acestei teoreme nu-i adevărată, căci o aceeaşi mulţime *m* poate avea diferite moduri de a fi bine ordonată, iar aceasta duce la alte numere ordinale. Şi acum, dacă ne întoarcem la acel articol din 1883 al lui Cantor, aş mai avea de citit de acolo numai un scurt fragment (p. 326) : „Dacă eu concep infinitul astfel, aşa cum am făcut aici precum şi în încercările mele mai vechi, atunci de aici decurge pentru mine o adevărată plăcere, căreia mă dedic plin de mulţumire, văzînd cum întregul concept de număr, care în finit are numai *fundal de număr*, se despică oarecum în două concepte atunci cînd ne ridicăm spre infinit, anume în conceptul de *putere*, independentă de ordinea în care este dată o mulţime, şi în conceptul de ***număr***, care este legat în chip necesar de o ordine conformă unei legi a mulţimii, ordine datorită căreia această mulţime devine bine ordonată. Şi dacă iarăşi cobor de la infinit la finit, atunci văd tot aşa de clar şi de bine cum cele două concepte devin unul şi se revarsă împreună în conceptul de număr întreg finit".

— Bravo, Nucule, cele citite de tine acum mi-au transmis aceeaşi „adevărată plăcere" pe care a simţit-o şi Cantor ! Adîncă şi mare bucurie, pe care trebuie să o materializăm numaidecît cu o cafeluţă fierbinte !

— Eu doresc ceva mai mult, simt că nu m-aş putea despărţi de acest matematician care în sufletul lui era desigur şi poet, fără să cunosc amănunte din viaţa lui, căci altfel, aş spune că în această scormonire prin infinit, freamătă nebunia.

— Şi dacă veţi afla că a murit bolnav de nervi? Că el singur spunea că după o criză de nervi vedea mult mai clar problemele pe care şi le punea şi putea stabili rezultate noi ?

— De ce aţi fost aşa de crud, stimate profesore? Pînă ce venea Bădia, iubitul nostru doctor s-ar fi complăcut într-o pasivitate caldă, aşa l-aţi trezit la realitatea de care

5 — Licuricii din adîncuri 207

crede că scapă numai venind printre noi ! Ca să dizolv această impresie am să mai citesc o scrisoare pe care a scris-o Cantor lui Richard Dedekind după 16 ani de la publicarea articolului din care am citit adineauri.

— Mă bucur că o faci şi că ţi-am descoperit o trăsătură de caracter ce nu o arăţi prea des.

— Degeaba, nu vă iert, stimate profesore. Aşa că citesc scrisoarea tot supărat: „Ştiţi că încă de mulţi ani am ajuns la un şir bine ordonat de puteri sau numere cardinale transfinite, pe care le numesc *alefuri* $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$; $\aleph_0$, înseamnă puterea mulţimilor „numărabile" în sens obişnuit, $\aleph_1$ este numărul cardinal imediat mai mare, $\aleph_2$ următorul mai mare, etc... Marea întrebare este dacă în afară de alefuri există şi alte puteri de mulţimi ; încă de acum doi ani sînt în posesia unei demonstraţii că nu există altele aşa încît, continuului liniar aritmetic (totalităţii numerelor reale) i se asociază un anumit alef ca număr cardinal". Scrisoarea aceasta este extraordinar de interesantă, dar partea aceea la care mă refer nu o pot citi acum, ci vom revedea-o mult mai tîrziu. De altfel, văd că Bădia a venit, aşa că are cuvîntul !

— Să nu aveţi prea mari pretenţii, am să vă povestesc doar cîteva crîmpeie dezlînate, de care-mi aduc aminte, căci am citit mai demult frumoasa carte a lui E. T. Bell despre marii matematicieni (16). Ştiu că Georg Cantor avea o înclinaţie vădită pentru matematici şi filosofie, iar talentul lui în această direcţie s-a arătat de timpuriu. Însă tatăl lui dorea ca el să se facă inginer şi, deşi hotărîrea l-a amărît, nu a protestat. Nu a făcut-o, pe de o parte fiindcă îşi iubea mult de tot părinţii şi pe de altă parte, fiindcă era o fire supusă şi timidă. Dar tatăl lui a înţeles — singur sau de la alţii? — că a comis o mare greşeală împiedicîndu-l să urmeze matematicile şi a revenit asupra dispoziţiei sale. A rămas o scrisoare a lui Cantor către tatăl său în care îşi exprimă, fericit, recunoştinţa că i se permite să studieze matematica ! Aşa că s-a înscris, la 17 ani, ca student la Universitatea din Zürich, dar după un an, murind tatăl lui, s-a mutat la Berlin. Aici a trecut, numai după patru ani, examenul de doctorat cu trei dintre cei mai renumiţi matematicieni de atunci L. E. Kummer, K. Weierstrass şi L. Kronecker. Îndată după aceea a fost numit

docent la Universitatea din Halle, unde a ajuns profesor. Dar pînă la vîrsta de 29 de ani, adică pînă în 1874, cînd a apărut articolul „Despre o proprietate a totalității numerelor algebrice reale", lucrările publicate de el pînă atunci erau destul de cuminți ca să nu atragă decît atenția specialiștilor, care le aprobau fără prea multă vorbărie. Această lucrare însă ieșea din comun și de aceea a stîrnit nu numai interes, dar și agitație. În ea era vorba, pe de o parte de mulțimea numerelor algebrice despre care Cantor arăta că este numărabilă și pe de altă parte despre mulțimea numerelor reale, pe care o prezenta ca pe o mulțime nenumărabilă.

— Amănuntul acesta mă flatează ! Înseamnă că nu arăta chiar așa de rău mirarea mea față de mulțimile numărabile și nenumărabile, dacă ditai matematicieni au reacționat la fel !

— Din contră, căci atunci nici acești mari matematicieni nu cunoșteau mai multe despre asemenea mulțimi decît dumneavoastră. Acesta a fost și motivul care a făcut ca lucrarea să fie întîmpinată cu entuziasm și admirație de unii, cu ironie și dezaprobare de alții. Aceste sentimente s-au accentuat și s-au intensificat, deoparte și de alta, la apariția altor articole în care Cantor a prezentat numerele cardinale transfinite, numerele ordinale transfinite și toate



Charles Hermite

problemele legate de teoria numerelor reale, concepută din acest punct de vedere. Să încep numind cîţiva dintre cei ce l-au admirat şi încurajat. De pildă, matematicianul şi filosoful francez L. Couturat, în cartea cu titlul *Despre infinitul matematic*, pe care a publicat-o în 1896 la Paris, afirma că datorită lui Cantor, „numărul cardinal a renăscut, ca pasărea Phönix, din propria ei cenuşă". Frege şi Russell, pe care i-am mai pomenit, au adoptat teoria mulţimilor şi au folosit-o ca punct de plecare în problemele cercetate de ei. Cunoscutul matematician suedez Mittag-Leffler, care fundase şi conducea revista „Acta Mathematica", i-a publicat în revista sa mai multe articole şi l-a încurajat să ţină piept celor ce-l atacau. Mittag-Leffler povesteşte că acest gest al lui l-a impresionat pe Cantor într-atît încît îi scria în fiecare săptămînă cîte o scrisoare. În una dintre ele îi arăta că a primit o scrisoare de la matematicianul francez Ch. Hermite, dar „elogiile cu care m-a copleşit şi care au pentru mine mult preţ, le merit aşa de puţin încît nu mă pot hotărî să le public, ca să nu fiu învinuit că m-am lăsat orbit de ele". Laude pe de o parte, critică şi ironie pe de alta. De la cine? Întîi de la cel mai de seamă matematician şi filosof francez de atunci, H. Poincaré. Dar Poincaré l-a combătut cu ironie şi cu eleganţa specifică omului nobil sufleteşte, aşa că Georg Cantor a putut



Richard Dedekind

suporta durerea acestei neînțelegeri. Al doilea matematician care l-a atacat a fost chiar profesorul pe care el l-a admirat, Leopold Kronecker. Critica desfășurată de Kronecker a atins forme atît de violente încît, după cîțiva ani a distrus echilibrul mintal al lui Cantor. La 10 ani după publicarea primului său articol, adică în 1884, s-a manifestat prima criză de nervi și a trebuit să fie internat într-un spital. Nu împlinise 40 de ani cînd speranța lui de a ajunge profesor la Berlin s-a năruit ! Mai mult, a pierdut încrederea în sine, iar viața lui va pendula, de aici înainte, între Universitate și spital. După ce a revenit la Universitate a cerut să i se schimbe catedra de matematici în alta de filosofie, deși scrisorile care le scria lui Richard Dedekind dovedea că el continua să se ocupe de teoria mulțimilor.

— Și cine era Richard Dedekind?

— Un foarte mare matematician, care a trăit 85 de ani și a lucrat în matematică pînă la sfîrșitul vieții, aproape exclusiv în domeniul teoriei numerelor iraționale, al teoriei numerelor algebrice ș.a., dar n-a fost prea bine înțeles atunci. De altfel, el a preferat să lucreze retras de lume căci, deși la 26 de ani fusese numit profesor la Școala Politehnică din Zürich, după 5 ani s-a retras ca să se întoarcă la Brunswick, locul lui de naștere.

— Și al lui Gauss !

— Da. Dedekind a fost chiar ultimul elev al lui Gauss. La Brunswick a rămas profesor la școala superioară tehnică timp de 50 de ani. Era mai bătrîn decît Cantor cu 14 ani și e sigur că în 1899 îl cunoștea pe Cantor și discuta cu el. Iată de unde se știe asta. În acel an, *Calendarul matematicienilor* arăta că în 4 septembrie 1899 a murit Dedekind. Această știre l-a amuzat pe matematician, l-a făcut să-i scrie editorului, arătîndu-i că în acea zi poate afirma după notele din jurnalul lui, că a avut bucuria să discute despre „sisteme și teorie“ cu invitatul și distinsul lui prieten Georg Cantor, din Halle“.

— Așadar, Cantor era atunci la 15 ani după prima lui criză?

— Între timp, lucrările lui Cantor ajunseseră să fie tot mai apreciate. Însuși Kronecker, înainte de a muri, în 1891, s-a împăcat cu Cantor, recunoscînd oarecum valoarea cercetărilor sale.



Leopold Kronecker

— În istoria științelor se cunosc multe dispute înverșunate, dar puține s-au încheiat cu asemenea rezultate dezastruoase. De aceea mulți istorici ai matematicii sînt de părere că vina bolii lui Cantor nu o poartă numai Kronecker, ci și echilibrul psihic al lui Cantor.

— Și eu cred la fel, stimate profesore. Atunci a fost acuzat Kronecker fiindcă avea un caracter imposibil și nimeni dintre colegii lui nu-l simpatiza. De altfel, se spunea despre el cam așa: „Acest sceptic nu se adresează celor vii, ci, cum o mărturisește el singur, celor ce vor veni după el". Era pesimist și caustic, dar era de bună credință în critica pe care o făcea, potrivit cu convingerile sale. E bine cunoscută considerația lui că „rezultatele celor mai profunde cercetări matematice trebuie să se exprime sub o formă simplă, prin proprietățile numerelor naturale".

— El care nu accepta nici existența numerelor iraționale altfel decît ca un mijloc de lucru, cum ar fi putut admite că numerele iraționale și transcendente pot fi mai multe decît numerele întregi, fracționare și algebrice luate la un loc? Cu atît mai mult cu cît — și asta îi obiecta el lui Cantor — a stabilit teorema asupra mulțimii acestor numere, fără să arate nici o metodă practică de a construi măcar un număr transcendent !

— Nu te contrazic, dar ceea ce este sigur, e că Georg Cantor a murit, în 1918, într-un spital de nevroze din Halle și că în boala lui se amestecă și neîndurătoarea critică a lui Kronecher.

— Dragă Bădie, nu știu ce impresie i-a făcut toată această poveste iubitului nostru doctor, că văd că tace chitic, dar mie, drept să-ți spun, deși o știam în părțile ei esențiale, mi-a lăsat un gust amar în gură. De aceea, te rog să nu mă lași să plec așa de la mata. Știu eu o anumită carte, și un anumit fragment din ea, care ar avea darul să ne redea la toți buna dispoziție pe care am avut-o cînd am venit aici.

— Dacă există un asemenea leac, cred că toți l-am accepta cu nerăbdare!

— Există, cum să nu, și fără anestezic sau bisturiu. Se cheamă *Matematica și logica* și cuprinde părerile lui Poincaré, după ce a citit articolul tînărului Georg Cantor despre infinitul actual (5, p. 153). Deci să căutăm leacul cu pricina:

„De multă vreme noțiunea de infinit a fost introdusă în matematică, dar acest infinit era ceea ce numesc filosofii *o devenire*. Infinitul matematic nu era decît o mărime ce putea crește dincolo de orice limită: era o mărime variabilă despre care nu se putea spune că a depășit *toate limitele*, ci numai că *le va depăși*. Cantor a hotărît să introducă în matematică un infinit actual, adică o mărime care nu-i numai în stare să depășească orice limite, dar care este considerată că le-a și depășit. Au fost puse probleme ca acestea: Există mai multe puncte în spațiu decît numere întregi? Există mai multe puncte în spațiu decît în plan? etc. Și astfel, numărul numerelor întregi, acela al punctelor din spațiu etc., constituie, ceea ce numește el un număr cardinal transfinit, adică un număr cardinal mai mare decît numerele cardinale cunoscute. Și el s-a amuzat să compare aceste numere cardinale transfinite... Mulți matematicieni s-au lansat pe urmele lui și și-au pus multe întrebări de acest fel. Și s-au familiarizat așa de bine cu numerele transfinite, încît au ajuns să considere că teoria numerelor finite depinde de aceea a numerelor cardinale ale lui Cantor. După părerea lor, ca să predai aritmetica

într-un mod cu adevărat logic, ar trebui să începi prin a stabili proprietăţile generale ale numerelor cardinale transfinite şi apoi să distingi printre ele o foarte mică clasă, aceea a numerelor întregi obişnuite. Prin acest înconjur s-ar putea ajunge să se demonstreze toate teoremele relativ la această clasă mică (adică toată aritmetica şi algebra noastră), fără să foloseşti nici un principiu străin de logică. Această metodă se opune, evident, oricărei psihologii sănătoase; desigur că nu a procedat aşa spiritul omenesc cînd a construit matematica; sper că aceşti autori nu intenţionează să o introducă în învăţămîntul secundar. Dar este cel puţin logică, sau, mai bine zis, corectă? Ne îndoim!".

— A doua oară îţi mulţumim astăzi, Nucule! Extraordinară experienţă psihologică aceea de a retrăi impresiile pe care le-a produs noţiunea de infinit actual introdusă pe neaşteptate asupra unui mare matematician şi totodată să ştii cele ce s-au petrecut un veac mai tîrziu şi să înţelegi că problema care a provocat toată neliniştea şi tulburarea atunci a devenit azi un adevăr elementar pe care-l învaţă copiii chiar din cursul elementar.

— Rămîne să ne spui care-i programul de miercurea viitoare, stimate ghid!

— Cred că am putea intra în miezul problemei fundamentelor, mai ales că şi în articolul lui Poincaré au fost cîteva aluzii într-acolo!

— Adică, vrei să spui că vom ataca logicismul!

— Întocmai! El e cel mai aproape.

IV

O CALE CU HÎRTOAPE

— Zilele trecute am citit ceva care m-a mirat foarte tare.

— Îmbucurător, dragă Nucule, căci după părerea lui Aristotel, omul a început să facă filosofie pentru că se mira de tot ce era în jurul lui. Înseamnă că ai stofă de filosof şi de aceea tare am vrea să aflăm ce lucru anume ţi-a stîrnit mirarea ?

— Trec peste înţepătura dumneavoastră catifelată, stimate profesore, ca să ajung la subiect. N-am ştiut şi nici nu mi-a venit să cred că abia în a doua jumătate a secolului al XIX-lea s-a stabilit legătura strînsă care există acum între logică şi matematică. Eu credeam că ea a existat întotdeauna.

— M-a mirat şi pe mine acest lucru, numai că pe atunci tu nu erai încă pe lume şi-mi închipui că şi tu, Teodor, ai păţit la fel ?

— Nu şi da. Nu, căci istoria matematicii ne arată că pînă în secolul al XIX-lea precizia logică şi rigoarea matematică nu duceau casă bună nici cu matematicienii de rasă. Oare nu mai ştiţi cîte năzbîtii a fost în stare să debiteze genialul Euler despre numerele imaginare ? Sau aţi uitat de sforţările uriaşe ale tînărului Abel, în lupta lui contra seriilor de convergenţă dubioasă, pe care matematicieni de seamă, printre care se găsea şi Euler, le admiteau în calcule fără să le stabilească, în prealabil, convergenţa ? Iată cum descrie Abel această strădanie unui prieten : „Aş consacra toate forţele mele ca să răspîndesc lumina în imensa obscuritate ce domneşte azi în analiză“ ! Aşadar, cred că-mi daţi dreptate dacă nu m-a mirat această tentativă de a



Niels Henrik Abel

lega mai strîns logica de matematică. Din toate părţile se arătau semne că venise timpul să se stabilească această legătură ! Totuşi, într-un fel m-a mirat şi de aceea chiar am recitit povestea lui George Boole cu gîndul ca să o povestesc aici. Mă bucură că aţi venit şi dumneavoastră, dragă doctore, căci faţă de data trecută, calea de azi va fi mai uşoară, deşi s-ar putea ca, atunci cînd ne-o fi lumea mai dragă, să dăm de vreo hîrtoapă.

— Am venit, fiindcă întîlnirea aceasta este pentru mine un straşnic deconectant, mai ales cînd se întîmplă să fi avut şi nişte operaţii grele ... Sînt foarte curios să aflu cine a fost şi ce a făcut George Boole ?

— Cine ? Îl las pe Bertrand Russell să vi-l recomande : ;„Matematicile pure au fost descoperite de Boole într-o lucrare pe care a intitulat-o *Legile gîndirii*".

— Drept să vă spun că, pentru mine, această frază nu are nici un sens ! Adică toţi matematicienii care au trăit pînă ce a scris Boole cartea aceasta, habar n-aveau de matematica pură ?

— Ai dreptate, dragă doctore ! Fraza aceasta are un sens pentru noi, care ştim ce a gîndit Russell, pentru ceilalţi însă e cam ermetică. De aceea, am să-mi ajut colegul, şi pe dumneavoastră, completînd-o cu fraza ce urmează în cartea lui Russell : „Opera lui se referă la logica for-

mală, iar aceasta este acelaşi lucru ca şi matematica".

— Acum, dragă Toader, am înţeles mai mult de-o grămadă ! Am dat oare de-o hîrtoapă de cum am pornit la drum ?

— Văd că v-aţi găsit şi dumneavoastră naşul, stimate profesore ! N-ar fi mai bine să începeţi chiar cu biografia ?

— Da, aşa gîndesc. George Boole s-a născut în Anglia, la Lincoln, în1815 şi era fiul unui mic negustor. Deşi avea o inteligenţă remarcabilă şi dorea să înveţe carte, nu s-a putut. De ce ? Pentru că, spune E.T. Bell (16, p. 464) : „Dacă urmărim descrierile scriitorilor englezi despre *acele frumoase timpuri de odinioară,* a fi fiul unui mic negustor însemna să fii osîndit, prin predestinare. Clasa socială la care aparţinea tatăl lui Boole era tratată cu dispreţ. Aşadar, copilului George Boole nu i-a fost deschisă, din cauza originii sale sociale, decît uşa şcolii elementare. Cînd a terminat-o, tatăl lui l-a încurajat cum a putut. Matematică ştia mai multă decît învăţase băiatul la şcoală şi nu i-a fost greu să-l îndrume. Cu latina şi greaca a rezolvat-o destul de uşor, fiindcă era prieten cu librarul din oraş. El avea şi cărţile necesare, şi cunoştea gramatica latină. După cîteva lecţii pregătitoare, George Boole a putut învăţa singur şi încă aşa de bine că la 12 ani a reuşit să traducă în englezeşte şi în versuri o odă a lui Horaţiu. Cîtă bucurie şi fericire trebuie să fi simţit tatăl ne-o putem închipui din faptul că a făcut el ce-a făcut şi oda feciorului său a apărut în ziarul local. Evenimentul nu a rămas necomentat. În acelaşi ziar au apărut articole, unele de laudă, dar în cele mai multe se punea la îndoială faptul că traducerea a fost făcută de George Boole. Profesorul de latină, considerînd traducerea ca atare, arăta ce greşeli gramaticale sau de construcţie au fost comise de autor. Ultima critică l-a bucurat nespus pe Boole, fiindcă în felul acesta a putut întrebuinţa expresiile corecte pe care altfel nu ar fi avut de unde le cunoaşte ! Antrenamentul cu limbile clasice i-au pregătit calea către limbile moderne : franceza, germana şi italiana. De la 16 ani, George Boole a căpătat un post de învăţător. Era tocmai ocupaţia de care avea nevoie : cu banii cîştigaţi îşi ajuta părinţii şi avea totodată destul timp pentru studii. La 20 de ani s-a hotărît să deschidă el însuşi o şcoală particulară. Cu această ocazie, cer-

cetările sale, care pînă atunci erau de partea literară, s-au îndreptat către matematici. Căci trebuind să predea și matematica a observat că manualele de matematici erau prost întocmite. S-a înfuriat și s-a hotărît să compună el altele mai bune. Comandîndu-și cărți a vrut să-și aleagă pe cei mai buni profesori de atunci. Astfel a cunoscut printre altele *Mecanica cerească* a lui Laplace și *Mecanica analitică* a lui Lagrange. Aceste lucrări l-au condus la cercetări proprii și ca să verifice rezultatele obținute a intrat în corespondență cu diverși matematicieni. Printre aceștia, matematicianul scoțian D.F. Gregory — care conducea revista matematică din Cambridge, ce o întemeiase tot el în 1837 — i-a publicat cîteva articole.

— Cum ? Vreți să spuneți că absolut nimeni nu l-a ajutat să înțeleagă problemele de matematică superioară și chiar să poată găsi rezultate originale ?

— Desigur, el nu a părăsit Lincoln-ul, iar acolo ... cine să-l îndrume ? A fost un *autodidact* în cel mai strict sens al cuvîntului și tocmai de aceea am ținut să vă povestesc această viață, ieșită din comun. A cunoscut matematica, s-ar putea spune din întîmplare, dar cînd a început să citească, desigur că fără nici un sistem, trecînd de la una la alta și revenind pînă ce i se lămurea vreo problemă sau o noțiune, s-a trezit că-i place matematica altfel decît



Joseph Louis Lagrange

îi plăcuseră pînă atunci celelalte studii literare şi a fost în stare să descopere adevăruri pe lîngă care marele Lagrange trecuse fără să le observe. Articolele publicate i-au adus noi prieteni, matematicieni competenţi din Cambridge şi aceştia l-au invitat să vină acolo ca să urmeze cursurile Universităţii. Era prea tîrziu, el nu şi-a părăsit şcoala sa şi nici familia ce era acum în seama lui. Dar printre prietenii pe care şi-i făcuse şi cu care era în corespondenţă se afla un vestit profesor de la Universitatea din Londra, Augustus De Morgan. El a tipărit în 1847 o carte cu titlul *Logica formală* în care se atrăgea pentru prima oară atenţia asupra aspectului matematic al logicii şi asupra analizei ce se putea face din punct de vedere logic, al simbolurilor operaţionale şi asupra legilor matematicii. George Boole a fost cucerit de aceste probleme. El studia pe atunci cartea de algebră, publicată în 1836 de George Peacock, o carte scrisă într-o formă cu totul deosebită de aceea a altor manuale de algebră. Aici se discutau principiile fundamentale ale algebrei şi se punea în evidenţă caracterul ei simbolic. Peacock stăruia asupra faptului că literele din expresiile algebrice *nu trebuie privite ca numere*, ci, în special, ca nişte *simboluri arbitrare*, care se pot combina între ele prin anumite operaţii ce se reprezintă prin semnele + sau ×, ultimul semn putînd fi şi omis dacă literele se scriu alăturat. Sub impresia acestor două cărţi, Boole a scris atunci o broşură, pe care a publicat-o, tot în 1847, *Analiza matematică a logicii*, în care a tradus logica în limbajul algebrei. Lucrarea a fost bine primită de matematicienii englezi, iar Morgan a considerat că reprezintă „o contribuţie originală la matematizarea raţionamentului logic". E foarte probabil că această carte să fi pricinuit şi chemarea lui Boole ca profesor la Universitatea irlandeză, din oraşul Cork, care s-a înfiinţat în 1849. El a acceptat numirea şi aici a continuat cercetările legate de modelarea şi algebrizarea logicii formale. Astfel, el a stabilit una dintre cele mai surprinzătoare aplicaţii ale matematicii în domeniul gîndirii pure, anume a pus bazele *logicii simbolice*, numită şi *logica matematică*. Lucrarea a apărut în 1854, cu titlul *Un studiu despre legile gîndirii, pe care se bazează teoriile matematice ale logicii şi ale probabilităţilor*. Prin această

lucrare, logica formală a căpătat o nouă înfățișare, fiind formalizată pe baza metodelor matematice.

— Şi cînd te gîndeşti că numai cu 60 de ani înainte, vestitul Immanuel Kant scria că de două mii de ani logica formală a lui Aristotel nu a făcut nici un pas înainte şi că, după toate aparențele, ea va rămîne o ştiință complet închisă !

— Dar mai nostim este că cercetările recente din istoria matematicilor au arătat că Boole a avut mai mulţi precursori. Aşa, de pildă, ideile fundamentale ale logicii simbolice au fost găsite în scrierile lui Aristotel, Descartes, Leibniz ş.a. Cel puţin aşa crede Beth. El enumeră vreo opt idei din logica lui Aristotel, care ar fi putut duce la dezvoltarea logicii simbolice. Printre ele ar fi: folosirea literelor ca să se indice variabilele, analogia dintre raţionament şi calcul (recunoscut numai în parte de Aristotel), concepţia unei matematici universale (idee care a fost reluată de Descartes şi Leibniz), o teorie a ştiinţelor deductive etc. Totuşi, Beth recunoaşte că logica simbolică nu s-a putut realiza de greci, căci ei „s-au dovedit incapabili de a crea un simbolism potrivit atît pentru aritmetică şi algebră, cît şi pentru logică, iar după stabilirea metodei algebrice (către 1600) dezvoltarea matematicii s-a făcut în altă direcţie, neprielnică logicii". (7, p. 27—28)



Gottfried Wilhelm Leibniz

— În *Discurs asupra metodei*, Descartes arăta că în locul logicii formale ar trebui introdusă o metodologie, care să aibă de model matematica. Am aici un interesant articol al acad. prof. At. Joja (17) din care am să citesc un fragment sugestiv: „El (Descartes) vroia să se constituie o *mathesis universalis* care să fie o știință a măsurii și a ordinei în orice domeniu, ... care ar fi putut fi totodată o logică și o matematică universală, aplicabilă în toate domeniile științei ... Proiectul acestei *mathesis universalis* l-a influențat pe Leibniz, discipolul lui Aristotel și al lui Descartes, care a conceput proiectul unei *scientia mirabilis*. Dar, contrar lui Descartes, Leibniz ... profund atașat de logica aristotelică a fost primul care a înțeles importanța matematizării logicii ... Leibniz dorea să înzestreze logica cu un limbaj mai precis decît limbajul obișnuit".

— Așa-i, Leibniz a căutat să lege conținutul matematic de relațiile logice dintre noțiuni și propoziții și a preconizat o „caracteristică universală", ca știință a ecuațiilor logice, analoagă cu aceea a ecuațiilor algebrice. Ea ar fi trebuit scrisă într-o *lingua caracteristica*, în care gîndurile să fie reprezentate prin simboluri, metoda de raționament „transformîndu-se astfel într-un calcul simbolic: *calculus ratiocinator*".

— Leibniz a intenționat, dar George Boole a depășit faza proiectelor și *a realizat* în mod practic și definitiv acel „calculus ratiocinator" pe care-l numim *logica simbolică*. Iată ce scria Boole la începutul cărții sale: „Obiectul tratatului de față este să studieze legile fundamentale ale acelor operații ale spiritului prin care se împlinește raționamentul și să le exprime în limbajul calculului: apoi să stabilească pe această bază știința logicii și să-i construiască metoda ... în fine, să culeagă din aceste diverse elemente de adevăr, puse în lumină în cursul acestor cercetări, cîteva indicații posibile asupra naturii și a constituției spiritului uman".

— Din cele ce scrie Boole rezultă că logica simbolică nu se ocupă de alte probleme decît logica tradițională; deosebirea este că Boole a introdus anumite simboluri care i-au permis să traducă raționamentul în calcul.

— Desigur, dat fiind că gîndirea logică nu înseamnă *o analiză de idei sau de fapte*. Aceasta-i treaba matematicii;

gîndirea logică este numai *o anumită combinare de simboluri*, adică de idei stabilite după niște legi sau norme operatorii. Am putea spune că atît logica tradițională, cît și cea matematică folosesc simboluri; *în prima însă simbolurile sînt de natură fonetică*, adică sînt cuvinte, iar în cealaltă, *simbolurile sînt de natură ideografică*, simbolizînd direct obiectul despre care se vorbește. Din această cauză, simbolurile ideografice, introduse de Boole, trebuie supuse la anumite *reguli de operație*, fapt care justifică și denumirea de *logică matematică*.

— Adică, vreți să spuneți că în denumirea de *logică matematică*, cuvîntul *matematică* se referă *numai la* natura formală în care se prezintă logica și nu la substanța sa?

— Desigur, odată ce logica nu se ocupă de numere și cantități! De altfel, în *Analiza matematică a logicii*, Boole arăta aceasta astfel: „Ceea ce face posibilă logica este existența în mintea noastră a noțiunilor generale, abilitatea noastră de a concepe o clasă și de a indica membrii ei individuali cu același nume. Teoria logicii este astfel intim legată de aceea a limbajului". (18)

— În cea de-a doua carte, *Legile gîndirii*, se găsesc legile de calcul ale logicii simbolice. Boole se ocupă în special cu *calculul claselor de elemente*. El notează cu x, y, z... simbolul claselor tuturor x-ilor, al tuturor y-lor etc. care au fost aleși din univers. Această *operație de alegere* a elementelor ce au proprietatea x sau y o asemuiește cu *operația de înmulțire din algebră*. Alegînd toți x-ii, apoi toți y-ii care se află în clasa x-ilor, rezultatul acestor două operații succesive de selectare reprezintă elementele ce au ambele calități, x și y. Ele se notează prin produsul xy. Operația s-ar fi putut face și în ordine inversă, adică să se fi ales întîi toți y-ii din univers și apoi din această clasă toți x-ii; rezultă astfel din nou elementele care posedă ambele proprietăți, y și x, așadar aceleași ca și în primul caz, adică $xy=yx$.

— A apărut o formulă identică cu una din algebră, deși cu alt înțeles care stabilește și comutativitatea!

— Da, dar mai sînt și altele. De pildă *alăturarea* sau *reuniunea* elementelor care aparțin la două clase diferite, x și y, este notată de Boole prin $(x+y)$. Aici sînt grupate elementele care posedă „ori proprietatea x, ori proprietatea

y, dar nu amîndouă, ca în cazul înmulțirii. Și această operație este comutativă: $(x+y)=(y+x)$, căci clasa elementelor care sînt x ori y coincide cu aceea a elementelor care sînt ori y, ori x. Operația de alegere (sau înmulțire) este asociativă față de reuniune: $z(x+y)=zx+zy$.

— E clar, căci dacă se aleg din clasa elementelor z pe acelea care au încă fie proprietatea x, fie proprietatea y, rezultatul operației este întocmai cu acela care s-ar fi petrecut dacă din clasa elementelor z s-ar fi ales odată pe acelea care au și proprietatea x și apoi s-ar fi ales elementele care au pe lîngă proprietatea z și proprietatea y.

— Cu semnul minus Boole a notat *operația inversă adunării logice*, adică operația de *excludere*. Se obține astfel clasa complimentară aceleia considerate. De exemplu, dacă x ar fi clasa plantelor și y a copacilor, $(x-y)$ reprezintă clasa tuturor plantelor cu excepția copacilor. Și în acest caz alegerea este asociativă față de scădere: $z(x-y)=$ $=zx-zy$.

— E natural să fie așa, fiindcă în cazul de față, dacă z ar însemna clasa florilor, florile alese dintre plantele deosebite de copaci înseamnă clasa florilor alese din clasa tuturor plantelor din care s-a exclus clasa florilor alese din aceea a copacilor.

— Analogia dintre logică și algebră a fost dusă mai departe de Boole prin introducerea a două *constante logice*, exprimate prin simbolurile 0 și 1, 0 reprezentînd clasa fără nici un element, iar 1 clasa tuturor elementelor din Univers. De aici rezultă formulele $1x=x$ și $0x=0$, care cred că nu au nevoie de explicații.

— Ba eu m-aș încumeta să o dau! Prima formulă spune că dacă din toate elementele din Univers aleg elementele x, obțin clasa x, iar a doua că din clasa vidă nu pot alege nici un x! Adică rămîne tot clasa vidă.

— Dacă vă plac asemenea jucării, atunci vă rog să le explicați și pe acestea: $1-x$; sau cît face $x(1-x)$ și $x+(1-x)$?

Prima formulă corespunde clasei complimentare elementelor x, adică aceea a tuturor elementelor din care sînt excluse elementele x. Cred că $x(1-x)=0$, fiindcă din clasa elementelor care nu cuprind pe x nu pot alege nici un element x, adică obțin clasa vidă. Formula aceasta însă nu

6 — Licuricii din adîncuri 207

mai corespunde cu aceea din algebră. A doua formulă: $x+(1-x)=1$, căci reuniunea dintre toate elementele x și toate elementele din care sînt excluse elementele x reprezintă toate elementele din Univers, adică 1.

— Îmi pare bine că ați remarcat faptul că formula $x(1-x)=0$, proprie algebrei logice, nu mai coincide cu formula corespunzătoare din algebra clasică. Ea nu-i singura. Iată alta, legată tot de operația de alegere $x \cdot x = x^2 = x$.

— În adevăr, ca să aleg din elementele x tot elementele x înseamnă să rămîn la ele.

— Fiindcă aceste nepotriviri ar fi putut surprinde pe unii dintre cititori, Boole le-a semnalat și precizat astfel: „Orice acord care se poate stabili între legile simbolurilor logicii și acelea ale algebrei nu poate rezulta decît dintr-un acord de procedee. Ambele domenii de interpretare rămîn distincte și independente, fiecare este supus la legi și condiții proprii ... simbolurile logicii sînt supuse la o lege specială la care simbolurile cantității, ca atare, nu sînt supuse (de exemplu, în algebra logicii, legea $x^2=x$ care se poate interpreta între altele ca fiind „clasa a tot ce este comun la o clasă x și care este ea însăși chiar clasa x"). (16. p. 472)

— Boole a făcut această observație constrîns fiind și de anumite formule algebrice care nu pot avea nici o interpretare logică. De pildă, ce ar putea însemna $(1+x)$?

— Ținînd seama de faptul că suma este o reuniune de clase ce nu au elemente comune, $(1+x)$ nu poate avea un sens logic decît dacă $x=0$, căci 1 cuprinde în sine toate elementele existente. La fel, nu are nici un sens logic expresia $(x+x)$, în care nu se poate aplica condiția: „ori...ori".

— Cred că nu a fost deloc ușor pentru logicienii înclinați să accepte matematizarea raționamentului logic, cînd s-au întîlnit cu asemenea expresii care să nu poată fi interpretate din punct de vedere al calculului logic!

— Nu, dar ele au fost un stimulent pentru noi cercetări. Acestea au contribuit la o mai mare dezvoltare a logicii simbolice, căci raționamentul simbolic are calitatea de a se putea aplica în orice domeniu în care gîndirea pune probleme. În domeniul construcțiilor, chimiei, economiei politice și cîte altele, folosirea simbolurilor logice, a metodelor grafice, care de fapt sînt tot simboluri logice, reprezintă

acum instrumentul de lucru cel mai comod şi absolut necesar ; cu alte cuvinte logica simbolică s-a integrat în aceste domenii.

— Numai George Boole, deşi a fost convins că a realizat o operă durabilă, nu s-a putut bucura de succesul creației lui, fiindcă a murit în 1864, cînd ideile sale nu pătrunseseră încă pe continent şi chiar nici în Anglia nu avuseseră încă ecoul de mai tîrziu după ce ele au fost puse în adevărata lor lumină.

— Ştiu că ideile lui George Boole au fost răspîndite mai întîi în America de către cunoscutul filosof şi logician american C. S. Peirce, fondatorul pragmatismului. În 1867 el a prezentat Academiei Americane de Ştiinţe şi Arte o dare de seamă asupra operei lui George Boole. Începînd de atunci, Peirce a extins rezultatele obţinute de A. De Morgan şi G. Boole, considerînd logica relaţiilor ca un instrument de seamă pentru analiza logică a matematicii. Tot el este primul care a stabilit principiile fundamentale pentru dezvoltarea logică a matematicii.

— Şi peste 15 ani de la moartea lui Boole, adică în 1879, profesorul F. L. Gottlob Frege, de la Universitatea din Halle, a publicat o carte intitulată *Begriffsschrift* adică „Scrierea conceptuală" în care a vrut să traducă în fapt ideea lui Leibniz, fără să ştie nimic de cele ce înfăptuise Boole. A urmat exact calea pe care a găsit-o Boole, dar nu a avut o inspiraţie tot aşa de înaripată ca a lui. Simbolurile pe care le-a introdus erau greoaie şi încîlcite, aşa că metoda propusă de el pentru matematizarea logicii nu a găsit adepţi nici chiar în imediata lui vecinătate şi nimeni nu a atras atenţia asupra ei. Frege însă şi-a urmat calea, propunîndu-şi să arate că legătura dintre logică şi aritmetică este aşa de strînsă încît şi aritmetica se poate deduce din logică. În 1884 a apărut lucrarea *Bazele aritmeticii*, unde acest program este înfăptuit : noţiunile aritmetice erau deduse din cele logice prin definiţii explicite, iar propoziţiile aritmeticii derivau din principiile logice, prin deducţii logice. Încîntat de realizarea lui, el a scris aceste rînduri : „Logica matematică este capabilă să reprezinte prin cel mai mic număr de convenţii toate propoziţiile matematice, chiar şi acelea mai complicate, care ar fi greu să fie traduse în limbajul obişnuit. Dar ea nu se reduce

la o scriere simbolică prescurtată, la un fel de tahigrafie, ea permite să studieze legile acestor semne și transformarea propozițiilor". (11, p. 381) Dar și cartea aceasta a trecut neobservată, deși Georg Cantor, care era coleg cu el, fiind profesor la aceeași Universitate, a făcut o recenzie a cărții ; nici el nu i-a sesizat importanța, deși Frege a folosit ideile lui Cantor despre mulțimi, cu alte cuvinte făcea parte dintre cei ce-l susțineau.

— Cantor avea o scuză, căci după cum am auzit miercurea trecută tocmai în acel an s-a îmbolnăvit, dar de ce ceilalți matematicieni nu au fost impresionați de această premieră mondială ?

— Se vede treaba că nu au înțeles-o. Fiecare își urmărea problema lui, cum spunea Eminescu : „Trăind în cercul vostru strîmt..."

— Te-aș ruga, dragă Nucule, să ne arăți cum a ajuns Frege la această logicizare a aritmeticii, căci, drept să-ți spun, nici eu nu prea știu bine chestia asta.

— Mă cam îndoiesc, stimate profesore, dar vreau să o iau ca bună. Frege a pornit de la noțiunea de bază a aritmeticii, care este numărul întreg și a căutat să-l definească pe cale logică.

— Dar numărul întreg mai are nevoie de definiție ? Dacă m-ar întreba pe mine cineva ce este numărul întreg, l-aș privi năucit și i-aș răspunde : — Cum, ce este : 1, 2, 3..., ce nu știi atîta lucru ?

— Nu sînteți singurul care ar răspunde așa, dragă doctore. Prin această atitudine însă ați trecut în tabăra intuiționiștilor, dar noi vă rugăm să rămîneți deocamdată aici cu noi, în grupul logiciștilor, ca să putem urmări cele ce ne va destăinui nepotul meu despre investigațiile lui Frege și ale celorlalți partizani ai lui !

— Pornind de la definiția unei noțiuni : „ o formă logică fundamentală care reflectă însușirile caracteristice necesare și generale ale unei clase de obiecte" el a recunoscut că numărul întreg este *din punct de vedere logic* o noțiune. Așadar, trebuia să pornească *de la noțiunea de clasă de obiecte* și să cerceteze raporturile logice ce se pot stabili între diferitele clase de obiecte atunci cînd ele au ca obiectiv să caracterizeze numărul și numărarea. Ideea originală a lui Frege a fost să arate că este posibil să stabilească faptul că două

clase conţin acelaşi număr de elemente, sau că o clasă are mai multe elemente decît alta, sau că o clasă nu are nici un element, bazîndu-se numai pe existenţa corespondenţei biunivoce dintre elemente şi fără a mai folosi vreo altă noţiune aritmetică.

— Înainte de a te lăsa să ne arăţi care a fost raţionamentul lui Frege, vreau să menţionez observaţia lui Beth, că, în construcţia sa, Frege s-a bazat totuşi şi pe următoarele trei axiome de comprehensiune, anume :

1. Obiectele care au o proprietate comună constituie o clasă în care acestea sînt elemente şi ea este determinată în mod univoc prin această proprietate caracteristică ;

2. O clasă este un obiect şi poate, la rîndul ei, să se prezinte ca elementul unei clase ;

3. Două clase care au aceleaşi elemente sînt identice.

— Nu ştiu de unde le-ai scos mata, Bădie, căci în cele două cărţi ale lui Beth pe care le cunosc eu nu le-am întîlnit. Ele formulează aşa de frumos şi sugestiv noţiunea destul de vagă de clasă, încît ascultîndu-le mi s-a şi înfăţişat un exemplu.

— Din cartea scrisă de Beth cu Piaget (4), pe care am găsit-o cînd am fost la Biblioteca Academiei, în Bucureşti. Şi mie mi-au plăcut, de aceea le-am şi reţinut. Care-i exemplul ce ţi-a trecut prin minte ?



Jean Piaget

— Se aplică bine la axioma a doua. O dreaptă poate fi privită ca o clasă de puncte, a punctelor din care ea este formată. Dar la rîndul ei, dreapta devine un element în clasa tuturor dreptelor care trec printr-un punct dat, sau sînt paralele cu o dreaptă dată.

— Dacă ai dat tu un exemplu, tot legat de axioma a doua, aş da şi eu unul.

— Dacă l-ai clocit tu, dragă Toa, atunci se admite, chiar dacă Nucu face zîmbre.

— Are dreptate băiatul, te pomeneşti că-l încurcăm și uită ce avea să ne spună !

— N-ai mata grijă, Bădie, că nu fac zîmbre, fiindcă, la nevoie, te iau pe mata de ajutor. Care-i exemplul despre care vreți să ne vorbiți ?

— Exemplul clasei vide. O clasă se poate construi chiar fără să presupunem existența vreunui element. Fie deci $\varnothing$ clasa vidă. Această clasă o poate considera ca element al unei noi clase, aceea a elementelor identice cu clasa vidă. Se obține o nouă clasă, pe care o notăm $[\Phi]$. Acum formez clasa care are ca elemente aceste două clase. Se obține o nouă clasă $\{\varnothing, [\Phi]\}$ şi pot merge aşa mai departe, construind clase vide ale căror elemente sînt tot clase vide !

— Şi Cantor s-a jucat cu mulțimea vidă, dar el a construit o infinitate de mulțimi vide, toate deosebindu-se între ele, dar fiecare avînd numai cîte un singur element ! Anume, el a început cu mulțimea vidă : v şi a construit mulțimea care conține pe v ca element unic : (v), apoi mulțimea care conține pe (v) ca element unic : $((v))$ şi aşa mai departe ! Aceste mulțimi există ? Nu ? Ştiu că nu-mi puteți răspunde, de aceea să-l lăsăm pe Nucu, să lege firul ce i l-am rupt noi !

— Aşadar, Frege s-a bazat pe ideea că poate ajunge la definiția numărului întreg dacă foloseşte corespondența biunivocă dintre elementele a două clase, fără să mai aibă nevoie de alte noțiuni aritmetice. Or, noțiunea de corespondență biunivocă între elementele a două mulțimi fusese introdusă de Cantor încă din 1874, cînd a publicat teoria mulțimilor. Frege a găsit aici elementele de care avea nevoie pentru a-şi stabili teoria sa, anume :

1) noţiunea de număr cardinal al unei mulţimi (sau al unei clase) ;

2) dacă elementele a două mulţimi (clase) se pot pune în corespondenţă biunivocă, mulţimile (clasele) au acelaşi număr cardinal. El a aplicat noţiunea de număr cardinal al unei clase de elemente şi a definit numărul întreg ca fiind clasa a căror elemente sînt clasele ale căror elemente se pot pune în corespondenţă biunivocă.

— Cu alte cuvinte, numărul *cinci* este clasa tuturor claselor ale căror elemente se pot pune în corespondenţă cu degetele unei mîini ?

— Da, după cum numărul zero este clasa claselor care l-a zădărît pe profesorul Toader ! Frege a stabilit astfel definiţiile logice ale numărului întreg, a lui zero şi a succesorului unui număr, fără să folosească nici o noţiune sau axiomă aritmetică. Apoi a demonstrat, tot pe cale logică, teorema care spune că „un număr n are un singur succesor $p=n+1$ şi invers, p are ca predecesor unic pe n. De aici a dedus că mulţimea numerelor întregi este nelimitată. De la aceste consideraţii, Frege a găsit toate teoremele aritmeticii, numai pe bază de raţionament, fapt care l-a făcut să creadă că aritmetica se poate reduce la logică. Îi mai rămînea să exprime aceste rezultate şi în limbajul formalizat al logicii simbolice şi s-a hotărît să facă aceasta folosind metoda pe care o găsise cu cinci ani înainte. Astfel că în 1893 apare primul volum din *Legile fundamentale ale aritmeticii*, care reprezintă *prima încercare de a traduce aritmetica în limbajul logicii simbolice*. S-a creat prin aceasta o tehnică nouă, aceea de a cerceta fundamentele matematicii, pornind de la principiile logicii şi, totodată, un curent filosofic nou, cunoscut azi sub numele de *logicism*, care are ca scop să pună în evidenţă în mod clar nu numai că numerele sînt obiecte logice, dar că toate conceptele matematice pot fi definite prin termeni logici, iar în demonstrarea teoremelor matematice pot fi folosite numai reguli şi legi logice de raţionament.

— Cînd a apărut cartea lui Frege, oarecare interes pentru logica matematică începuse să se manifeste şi în Italia. Din 1891, Giuseppe Peano publica articole despre aceste probleme într-o revistă condusă de el. Opera sa principală, cartea de bază din acest domeniu : *Formularul mate-*

matic avea să apară în mai multe fascicule abia între 1895—1908, scopul fiind definit în prefaţă de Peano astfel: „Formularul matematic are ca scop să publice propoziţiile cunoscute din diferite domenii ale matematicii. Aceste propoziţii sînt exprimate în formule cu ajutorul notaţiilor din *Logica matematică*, explicate în *Introducerea* la formular". Această lucrare a fost un adevărat stimulent pentru logisticienii de mai tîrziu prin faptul că simbolurile logice propuse de el erau simple şi uşor de mînuit.

— După cîte ştiu, în volumul I din *Autobiografia* lui Russell, autorul povesteşte că în 1900, pe cînd era la Paris ca să participe la Congresul internaţional de filosofie, s-a întîlnit cu Peano şi a discutat cu el despre sistemul de notaţii pe care l-a inventat pentru formulizarea logicii. Această discuţie a trezit în el imboldul care-i trebuia ca să compună *Principiile matematice*, cartea ce avea să apară în 1903, şi să joace un rol important în răspîndirea logicismului.

— De fapt, interesul pentru logica simbolică şi dezvoltarea ei mai susţinută se datoreşte Congresului din 1900 de la Paris. În Franţa s-au tipărit lucrările lui L. Couturat, J. Cavailles, A. Lautmann, în Anglia a lui B. Russell şi prin aceste lucrări au apărut la suprafaţă atît contribuţia lui Boole şi Peirce, cît şi aceea a lui Frege, la fundarea logicii matematicii, contribuţie care pînă atunci rămăsese în umbră.

— Bertrand Russell începuse, de fapt, să se ocupe de probleme de logică matematică, precum şi de logicizarea aritmeticii înainte de 1900 şi a ajuns şi el, independent de Frege, la aceeaşi definiţie logică a numărului pe care a stabilit-o Frege. După întîlnirea cu Peano, el a avut avantajul că a găsit un sistem simbolic mult mai simplu decît acela al lui Frege şi atunci cînd, în 1903, a publicat cartea sa *Principiile matematice*, unde a folosit limbajul simbolic inventat de Peano, lucrarea s-a bucurat de un real succes. Prin această carte, matematicienii au aflat şi de cartea lui Frege, citată de către Russell.

— Pe Frege nu l-a descurajat faptul că lucrările sale nu au trezit nici un ecou în lumea matematică, să zicem pînă la Congresul de la Paris ?

— Se pare că nu ; el era conştient de valoarea operei sale şi de aceea lucra cu multă sîrguinţă la volumul al doilea

din *Legile fundamentale ale aritmeticii*, pe care l-a terminat şi l-a dat la tipar în 1903. În acest an a apărut şi cartea lui Russell, în care autorul declara : „Faptul că întreaga matematică aparţine logicii simbolice este una dintre cele mai mari descoperiri din epoca noastră. Odată acest lucru stabilit, cercetarea principiilor matematicii nu se mai bazează decît pe însăşi analiza logicii simbolice".

— Ce curaj ! Cînd ştii cele ce ştii, să faci asemenea afirmaţie, de bună credinţă fiind, şi să dovedeşti această bună credinţă luptînd ani de zile, ca să-ţi menţii părerea contra faptului ce i se împotrivea !

— Faceţi opinie separată şi asta nu o admit ! Dumneavoastră trei văd că vă înţelegeţi perfect, dar cu mine cum rămîne ?

— Rămîne să vă explicăm ce s-a întîmplat şi ce se ascunde în dosul acestei declaraţii solemne. La baza definiţiei logice a numărului, Russell a descoperit că se ascunde un paradox. Aşa fiind, se mai poate afirma, sus şi tare, că „întreaga matematică aparţine logicii simbolice" ?

— Ce vreţi să spuneţi cu paradoxul, doar ne-am lămurit perfect asupra definiţiei numărului întreg, el este clasa tuturor claselor...

— Ei, vedeţi că aici e buba ! Dacă se consideră clasa care se conţine pe ea însăşi ca element, atunci, gata! Apare şi paradoxul !

— Iarăşi mă încurcaţi ! Am înţeles foarte bine că o clasă poate să fie la rîndul ei elementul altei clase, dar ca ea însăşi să fie elementul propriei sale clase, asta mi se pare cam abracadabrant !

— Dar nu-i deloc aşa, stimate doctore. Un singur exemplu vă va lămuri : iată, să privim cărţile acestea de pe masă. Ele formează o clasă. Această clasă este o *noţiune* care are ca sferă mulţimea cărţilor de pe masă, în cazul nostru 5 cărţi. Fiindcă această noţiune de *5 cărţi* este deosebită de noţiunea de *carte*, spunem că această clasă de obiecte nu se conţine pe ea însăşi ca element. Să luăm acum alt exemplu : fie clasa noţiunilor matematice. O *noţiune matematică* nu-i ceva concret, aşa cum este o carte, ci este *ceva abstract*. În acelaşi timp şi *clasa noţiunilor matematice* este tot o noţiune abstractă. Atunci ?

— Da, trebuie să recunosc că, în acest caz, clasa noțiunilor matematice face parte, *ca noțiune abstractă,* din clasa noțiunilor matematice, adică ea se conține pe ea însăși ca element. Drept să vă spun, nu mi-am închipuit că matematica poate prezenta chestiuni așa de șugubețe ! Să mai vedem un exemplu !

— Fie ! Să considerăm clasa tuturor claselor formate din trei elemente. Este această clasă un element al ei ?

— Dar această clasă reprezintă chiar definiția *numărului trei,* or ea cuprinde, prin definiție, mai mult decît trei clase, adică de trei elemente, și deci *nu face parte* din clasa ce se cuprinde pe ea însăși ca element.

— Să luăm acum clasa tuturor claselor ce cuprind fiecare mai mult decît trei elemente.

— În acest caz, lucrurile se schimbă, clasa se cuprinde pe ea însăși ca element !

— Cred că putem ataca acum paradoxul lui Russell, ce a fost descoperit în același timp și de Zermelo. Se consideră *clasa C a tuturor claselor ce nu se conțin ca element.* În care categorie o așezăm, dragă doctore ? Mă adresez dumneavoastră, fiindcă, deși medic, încă nu sînteți uns cu toate alifiile noastre !

— Nu sînt uns cu toate alifiile, dar m-ați uns acuma, anunțîndu-mă că-i vorba de un paradox ! Aș zice că face parte din clasa claselor *ce nu se conțin* ca element.

— În acest caz, însăși definiția ei arată că *este un element* al acestei clase, așadar *face parte* din clasa claselor *ce se conțin ca element* !

— Rămîne cealaltă ipoteză : clasa *C* face parte din clasa claselor *ce se conțin* ca element.

— Dar, în acest caz, ea aparține, tot prin definiție, claselor *ce nu se conțin* ca element !

— În adevăr, sîntem într-un cerc vicios care duce la paradox : dacă admit că *C* face parte din clasa claselor ce *nu se conțin* ca element, rezultă că *C* face parte din clasa claselor *ce se conțin* ca element, și invers !

— După cîte înțeleg, acest paradox duce de rîpă și teoria mulțimilor !

— Ceea ce este mai grav, nu-i paradoxul în sine, ci faptul că pune în discuție principiul logic al terțiului exclus,

pe care se bazează posibilitatea de a deduce matematica din logică.

— Adică noțiunea logică a numărului se bazează pe o ipoteză nelogică ? Strașnică hîrtoapă, n-am ce spune ! Și Frege ce-a zis ? Cum și cînd a aflat despre acest dezastru ?

— O spune singur, într-o notă pe care a adăugat-o la sfîrșitul volumului al doilea din *Legile fundamentale...* apărut în 1903 : „Nu-i nimic mai dureros pentru un om de știință decît să vadă prăbușindu-se temelia, exact în clipa cînd opera sa era terminată. Eu m-am găsit în această situație cînd am primit scrisoarea domnului Bertrand Russell chiar atunci cînd această lucrare se afla sub tipar". Odată cu temelia s-a prăbușit și elanul lui Frege, căci spre deosebire de Russell, care a continuat să lucreze și să susțină logicismul, Frege nu a mai publicat nimic în această direcție.

— Foarte interesantă este observația lui Ștefan Körner cu privire la această întîmplare : „Unul dintre cele mai importante și mai fecunde evenimente din istoria logicii matematice și a filosofiei matematicii a fost descoperirea că logica claselor, a lui Cantor, admițînd drept clasă orice colecție, oricum ar fi formată, duce la contradicții. Apariția contradicțiilor face necesară distincția dintre clasele admisibile, adică cele care duc la contradicții interne și cele care nu duc. Regiunea gîndirii unde astfel de distincții sînt imperios necesare este oarecum ca o mlaștină vestită, pe care nimeni n-ar putea-o seca și peste care ar trebui construit un pod, prin orice mijloace artificiale la îndemînă. Calea deducției de la logică la matematică duce prin acest teritoriu. Pentru a putea trece de la una la cealaltă, discipolii lui Leibniz, Frege și Russell, sînt forțați să facă aici supoziții, nu însă „evident logice", cel puțin în sensul „logicului" pe care îl implică folosirea acestui termen de către Leibniz, Frege sau Russell". (13, p. 59).

— Parcă ne-am fi înțeles de mai înainte ca să citești aceste observații ale lui Körner, Bădie, căci vreau să mă opresc asupra atitudinii lui Russell față de paradoxul descoperit. El nu s-a mărginit numai să-l aducă la cunoștința lui Frege, ci l-a și publicat în cartea lui *Principiile matematicii*, indicînd mai multe metode prin care i se părea lui că-l poate înlătura, fiindcă, după cum am mai spus,

el nu s-a gîndit nici o clipă că ar putea renunța la *logicism* ! După părerea lui, pe care de altfel a exprimat-o și Poincaré, acest paradox ca și altele ce ar mai fi putut apărea în teoria mulțimilor, avea drept cauză *cercul vicios* care se formează atunci cînd o clasă de elemente conține elemente ce se definesc numai cu ajutorul clasei respective. El a vrut să-l elimine, analizîndu-l după *principiul cercului vicios* pe care l-a formulat astfel : „Tot ce conține o variabilă legată trebuie exclus dintre valorile acestei variabile". Astfel spus : „ ceea ce implică totalitatea unei clase de elemente nu trebuie să aparțină clasei". La această problemă, ca și la analiza fundamentelor întregii matematice și a teoriei mulțimilor pe cale logică, Russell a lucrat timp de 10 ani împreună cu filosoful A. N. Whitehead, folosind limbajul logicii simbolice introdus de Peano. Rezultatele au apărut, între 1910—1913, în trei volume, cunoscute azi pretutindeni, purtînd ca titlu *Principia Mathematica.*

— Ar fi oare o prea mare pretenție din partea mea, dacă v-aș ruga să-mi arătați cum este scrierea aceea formalizată, ori simbolică, să văd și eu prin ce minune a atras ea pe matematicieni de partea ei ? Departe de mine gîndul de a pretinde să descifrez paginile scrise cu aceste hieroglife pe care le văd în cărțile lui Beth, sau în aceea a lui Dumitriu, sau în unele articole din Comunicările din Zürich, publicate de Gonseth ! Aș dori numai să le cunosc.

— Nu ! Dorința dumneavoastră e bine venită. Vă voi prezenta *principiile unui sistem de logică formalizată,* folosindu-mă chiar de cărțile pe care le-ați enumerat. Aceasta reprezintă nivelul inferior de formalizare, numit și *teoria cuantificatorilor.* Țin să vă atrag atenția că de multă vreme, aș spune chiar din timpul matematicii grecești, au fost folosite *simboluri matematice,* stabilite după anumite reguli bine definite, însă acele simboluri erau amestecate în raționamentul matematic, sau urmate de limbajul obișnuit. Aceasta era o *formalizare necompletă.* Acum este vorba de o *formalizare completă,* adică de o *clasă de propoziții* care sînt scrise prin semne după *anumite reguli convenționale.* Formalizarea se face prin *semne tehnice,* numite *atomi, operatori* și *cuantificatori,* care pot fi legate între ele după reguli precise astfel ca să formeze o formulă matematică. Frege mai întîi, apoi Russell și Whitehead au considerat propo-

ziția ca elementul principal al logicii matematice, de aceea și relațiile impuse între semnele folosite poartă numele de *calculul propozițional*, iar teoria lui, *teoria operatorilor propoziționali*. *Atomii* se notează cu litere: p, q, r, ... și se numesc *variabile de enunț*, fiindcă reprezintă propoziții elementare. De exemplu „p" poate însemna „rîde", „q": „doarme" etc. Atomii $a(x)$, $b(x)$ etc. conțin variabila liberă „x" care poate fi o variabilă de predicat sau proprietate. Asemenea expresii reprezintă un enunț care arată o proprietate a unei substanțe individuale sau atribuie un predicat (a) unui individ (x). De exemplu, $a(x)$ poate însemna: Bădia (x) este serios (a), iar $b(x, y)$: Bădia este prietenul (b) domnului Toader (y).

Operatorii sau constantele logice se notează prin semnele următoare, avînd semnificațiile:

— (negație): pus deasupra unui atom transformă orice propoziție în negația ei. Păstrînd exemplul de mai sus: $\overline{a(x)}$ se citește: Bădia nu-i serios! Bineînțeles că se citește numai, dar nu este așa!

$\wedge$ (conjuncția: *și*) se pune între doi atomi. Astfel $a(x) \wedge b(x, y)$ se citește: Bădia este serios și este prietenul domnului Toader.

$\vee$ (disjuncția: *sau*) pusă între doi atomi ($p \vee q$) se citește, ținînd seamă de semnificarea dată lui p și q: „rîde sau doarme". Ea specifică numai adevărul uneia dintre propoziții: sau rîde, sau doarme. Dacă intervine negația, interpretarea se schimbă: $p \vee \bar{q}$ înseamnă rîde sau nu doarme. Asta, dacă negația se referă numai la un atom, dacă însă se referă la propoziția întreagă ($\overline{p \vee q}$), sensul este altul.

— Înseamnă oare: Nu-i adevărat că rîde sau doarme?

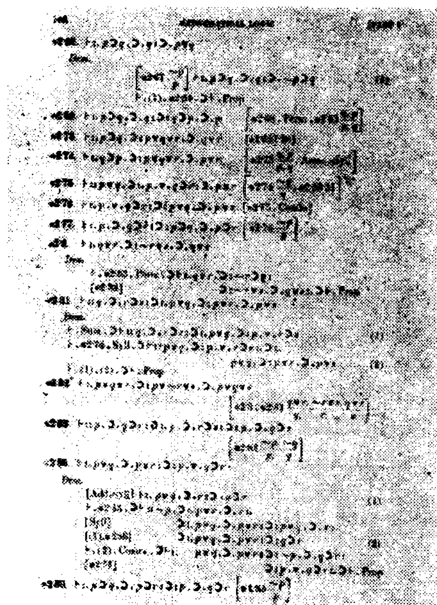
— Da, *nu-i adevărat* sau *este fals*! Alt operator este $\to$ (implicația: *dacă ... atunci*). De pildă $\bar{p} \to q$: dacă nu rîde, atunci doarme.

$=$ (echivalență). Dubla implicație se poate înlocui prin acest simbol de echivalență. Anume $p = q$ înseamnă

$$p \to q \wedge q \to p.$$

O grupare care conține atomi și operatori formează *o formulă completă*. Operatorii au între ei anumite relații evidente în mod intuitiv. De exemplu, formula

$$p \to q = \bar{p} \vee q.$$



Pagină din „Principia Mathematica"

— În adevăr, dacă *p* implică *q* atunci *nu p* îl exclude pe *q*, adică sau nu este *p*, sau este *q*.

— Dar propoziția aceasta: $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$, cum o citiți?

— Dacă nu există *p* și *q* deodată atunci nu există fie *p*, fie *q*!

— Iată și cîteva propoziții din sistemul de axiome care figurează în *Principia Mathematica* a lui Russell și Whitehead, pe care aș vrea să mi le interpretați, stimate doctore!

$$(p \vee p) \rightarrow p;\ p \rightarrow (p \vee q);\ (p \vee q) \rightarrow (q \vee p);$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)].$$

— Prima spune că „*p* sau *p* implică *p*", a doua că: *p* implică *p* sau *q*; a treia că, dacă avem *p* sau *q*, atunci avem și *q* sau *p*. A patra că dacă *p* implică *q*, atunci aceasta implică: *r* sau *p* implică *r* sau *q*.

— Și atunci, cum rămîne cu afirmația dumneavoastră că n-aveți pretenția să descifrați hieroglifele calculului simbolic?

— În loc să aşteptaţi răspunsul doctorului nostru, te întreb eu pe tine, dacă ai terminat cu operatorii ?

— Nu, Bădie, mi-au mai rămas cuantificatorii. Căutam să trag şi eu chiulul, dar nu mi-a mers. *Cuantificatorii* sînt operatorii care *generalizează* un enunţ sau îl *particularizează*. Prin ei se stabileşte relaţia dintre un element şi clasa căreia îi aparţine. În limbajul obişnuit există mai multe nuanţe prin care se poate semnala că obiectul x aparţine unei clase : acest x ; un x ; nici un x ; sau x-i. Elementul x pus între paranteze, sau precedat de semnul $\forall$ se prezintă ca un cuantificator de generalizare : (x) sau $\forall x$ înseamnă : pentru toţi x-i, sau oricare ar fi x. Dacă ne referim la semnificaţia care am dat-o mai înainte atomului a, expresia $(x)a(x)$ se citeşte : toţi oamenii sînt serioşi. Lăsînd deoparte particularizarea aceasta şi considerînd că $a(x)$ *este o propoziţie* în care intră elementul arbitrar al unei clase, atunci $(x)a(x)$ înseamnă că *toţi* x-i verifică propoziţia $a(x)$. Operatorii *care particularizează* un enunţ se notează prin semnele (Ex), (Ey) ... sau $\exists x$, $\exists y$, şi se citeşte : *există unele valori ale lui x*, sau există unele valori ale lui y etc. Propoziţia $(Ex)a(x)$ înseamnă deci : Există cel puţin un om serios sau, în general : există cel puţin un x care verifică propoziţia $a(x)$. Spre deosebire de atomii $a(x)$, $b(x, y)$ care conţin *variabilele libere* x sau (x, y), expresiile de forma $(x)a(x)$ sau $(Ex)b(x, y)$ conţin variabila legată x, iar expresia de forma $(x)(Ey)[b(x, z)]$ conţine *variabilele legate* x şi y şi *variabila liberă* z. Iată deci şi alte moduri de a obţine expresii, oricît de complicate, cînd se aplică alături de operatorii arătaţi mai înainte şi cuantificatorii. Tot printre operatori este inclus şi semnul de aserţiune $\vdash$, imaginat de Frege şi adoptat de Russell în cartea sa. De exemplu $\vdash p$ se citeşte „este adevărat că rîde", adică aserţiunea se referă direct la atomul rîde. În cazul că avem $\vdash p \rightarrow q$ aserţiunea nu se mai referă *la atomi*, ci *la implicaţie* : „este adevărat că p implică q". Am să termin aceste indicaţii, exprimînd simbolic principiul logic cunoscut sub numele de „modus ponens" :

$$\frac{\begin{array}{l}\vdash p \rightarrow q \\ \vdash p\end{array}}{\vdash q}$$

— Şi eu am să-l citesc : „dacă este adevărat că p implică q şi p este adevărat, q este adevărat". E interesantă şi atrăgătoare metoda şi drept să vă spun că m-ar tenta asemenea exerciţii, deşi ştiu bine că celelalte nu pot fi tot aşa de simple ca acestea.

— Desigur că nu, dar să ştiţi că vă admir entuziasmul cu care vă adaptaţi noului. Sînteți mai aproape de Nucu decît de noi şi faptul e explicabil nu numai prin diferenţa de vîrstă faţă de noi doi, ci şi prin meseria dumneavoastră. Ea nu vă permite rutina, căci nici un caz care vi se prezintă la operaţie nu cred că se aseamănă cu altul, fiecare caz avînd specificul lui.

— Aici aţi ghicit, de altfel formula e bine cunoscută : „nu există boală, ci numai bolnavi".

— Pe noi, căci cred că exprim şi părerea prietenului meu, care nu am deprins această scriere din tinereţe, cum e cazul lui Nucu, deşi o putem urmări, nu ne atrage. Mă gîndesc că aşa trebuie să se fi petrecut lucrurile la începutul secolului al XVII-lea, cînd François Viète a introdus notaţiile algebrice simbolice. Matematicienii de atunci scriau cu uşurinţă toţi termenii unei ecuaţii *cu cuvinte* şi le era greu să-i urmărească pe cei tineri care notau pe „x la pătrat" prin x^2 şi scriau o ecuaţie de gradul al treilea sub forma x^3+ $+ax^2+bx+c=0$, fapt care pentru Tartaglia era inexplicabil. El a stabilit trei formule de rezolvare ale acestei ecuaţii fiindcă ea trebuia scrisă sub trei forme diferite, astfel ca nici un termen să nu aibă un coeficient negativ. De exemplu : $x^3+2x=3$ şi $x^3=2x+3$. Pe lîngă aceasta, el scria „x la puterea a treia" în loc de x^3. De altfel, însuşi Viète nu a acceptat numerele negative în ecuaţiile lui, ci numai Descartes.

— Dar de ce te întorci cu gîndul la Viète şi Descartes şi nu vii mai încoace, dragă Toa ? Crezi că Poincaré a înghiţit în limbajul simbolic acele notaţii, din vremea lui, introduse de Peano, Frege şi Russell ? Uite ce scria el, la capitolul „Pasigrafie", în articolul din care am mai citit cîndva (5, p. 166) : „Limbajul simbolic creat de dl. Peano joacă un rol foarte mare în aceste noi cercetări. El este susceptibil de a aduce unele servicii, dar îmi pare că dl. Couturat îi dă o importanţă exagerată, care ar putea să-l uluiască chiar şi pe domnul Peano. Elementul esenţial al acestui

limbaj constă din anumite semne algebrice care reprezintă diferite conjuncţiuni : dacă, şi, sau, deci. Că aceste semne pot fi comode, este posibil : dar ca ele să fie destinate să reînnoiască întreaga filosofie, e cu totul altceva. E cam greu să admiţi că vorba *dacă* cîştigă atunci cînd se scrie $\supset$ o însuşire pe care nu o avea cînd era scrisă *dacă*. Această invenţie a domnului Peano a fost numită la început *pasigrafie*, adică arta de a scrie un tratat de matematici fără a folosi vreun cuvînt din limbajul obişnuit. Acest nume îi definea foarte exact limitele. De atunci a fost ridicat la o demnitate mai înaltă, conferindu-i-se titlul de *logistică*. Acest cuvînt se pare că e folosit la Şcoala de război cînd trebuie stabilite şi cantonate trupele, dar aici nu trebuie să ne temem de nici o confuzie şi se vede imediat că acest nume nou implică intenţia de a revoluţiona logica".

— Ai, matale, Bădie, o slăbiciune pentru Poincaré, şi gata ! Nu zic că n-am savurat şi eu ironia cu logistica, fiindcă a fost plasată admirabil, numai că de data aceasta, din tot fragmentul pe care ni l-ai citit, nu a rămas valabil decît această ironie.

— În adevăr, să legi denumirea de logistică de o treabă administrativă din armată de cantonarea trupelor, cred că a stîrnit hohotele de rîs ale tuturor matematicienilor căci toţi ştiau, tot aşa de bine ca şi Poincaré, că denumirea de *logistică* este de origine greacă şi are înţeles de *arta de a calcula*. La greci logistica era aritmetica practică ; ea se deosebea de cea teoretică, azi numită *teoria numerelor*, iar la greci *Aritmetica*.

— Că au rîs şi au apreciat gluma nu mă îndoiesc, dar, din păcate, viitorul nu i-a dat dreptate lui Poincaré şi dacă atunci mulţi matematicieni nu au văzut în acele semne nimic alta decît nişte prescurtări comode, azi s-a dovedit că ele au reînnoit cu adevărat matematica şi filosofia matematicii. Aceasta nu s-a petrecut imediat, dar după cîteva decenii, da. Azi, cele mai multe dintre articolele sau cărţile de algebră şi analiză, ca să nu mai amintesc de acelea de logică matematică, nu le poţi citi dacă nu cunoşti acest limbaj al semnelor. Şi nu numai pentru că limbajul semnelor s-a dovedit a fi mai comod, ci pentru că prin el s-au putut exprima propoziţii şi idei de primă

importanță în domeniul fundamentelor matematicii și care nu-și găsesc echivalentul în limbajul comun !

— Aici îți dau și eu dreptate, dragă Nucule. Cred că Poincaré a făcut aceste observații ademenit de plăcerea de a-i zeflemisi pe logiciști, căci dacă s-ar fi gîndit măcar o clipă cît de mult datorează aritmetica numai unui singur simbol, *lui zero* și prin el introducerii scrierii poziționale a numerelor, cred că nu ar mai fi scris acele rînduri. Semnele introduse în logica matematică au înlăturat multe ambiguități din limbajul obișnuit.

— Acum, dacă-mi dați voie, am să vă citesc și eu ceva despre logica matematică, dintr-un articol modern intitulat „Exemplul logicii formale", scris de un mare matematician și om de spirit al nostru, care a dispărut dintre noi prea repede : acad. prof. Grigore C. Moisil. Articolul se află în volumul postum *Știință și umanism* în care elevul său, prof. Solomon Marcus, a adunat o parte din sclipitoarele sale observații publicate prin reviste. (19) „Cînd se vorbește despre procesul de matematizare a științelor umane, nu trebuie uitată acea disciplină umană care, e drept, e considerată de mulți ca foarte inumană : logica. Am auzit, într-o dispută violentă, aruncîndu-se insulta supremă : ești prea logic. Este omul considerat ca prea aspru cînd îți cere să nu faci greșeli de logică ? Legile nu pedepsesc greșelile de logică. Societatea le tolerează mai mult decît greșelile de tipar... De vreo sută de ani logica a intrat pe făgașul matematizării. Progresele ei ca logică matematică au fost mari. S-au creat capitole noi, cum e logica relațiilor ; s-au dezvoltat capitole abia abordate înainte, cum e logica propozițiilor, s-au introdus idei adînci cum e teoria tipurilor ; s-au valorificat nuanțe ; s-au dovedit rezultate tulburătoare..." Mă opresc deocamdată aici ca să-l las pe Nucu să ne spună cîteva cuvinte despre teoria tipurilor logice.

— Teoria tipurilor logice, de diferite ordine, a fost creată de Russell și Whitehead și expusă în primul volum din *Principia Mathematica*, cu intenția de a elimina paradoxul clasei tuturor claselor, prin mijloace pur logice, dat fiind că această problemă privește chiar fundamentele logicii generale, depășind așadar fundamentele matematicii. După cum am mai spus, Russell a considerat că antinomiile re-

zultă dintr-un *cerc vicios* și eliminarea lor cere aplicarea *principiului cercului vicios.*

— Pe care l-ai enunțat parcă astfel: „orice conține o variabilă legată trebuie să fie exclus dintre valorile acestei variabile". Aceasta e clar, dar ce este un *tip logic* ?

— Am să explic folosind cartea lui Beth, unde am găsit o formă mai modernă și mai simplificată a teoriei tipurilor logice. (7. p. 185) Ideea principală este o ierarhizare a variabilelor în *variabile de tip zero*: x_0, y_0 ... variabile de tip 1: x_1, y_1 ..., variabile de tip *k*: x_k, y_k, ... etc. Variabilele de tip zero au ca valori chiar elementele-obiecte, cele de tip unu: clasele de obiecte, cele de tip doi: familiile de clase de obiecte, ș.a.m.d. Așadar, la o ierarhizare a variabilelor corespunde și o ierarhie a domeniilor valorilor corespunzătoare. Aceasta înseamnă că fiecare element aparține numai unui *anumit tip* perfect determinat, care se deosebește de alte tipuri, și, dacă se consideră un element de tip zero, o proprietate a acestui element devine un obiect de tip unu, așadar clasa din care face parte un element devine automat un element de tip superior și deci *nu mai poate face parte din aceeași clasă cu elementul pe care-l cuprinde.* Se vede de aici că această teorie a fost elaborată ca să evite cazul claselor de elemente care ar putea deveni, la rîndul lor, elementele acelor clase. În acest caz, clasele de elemente devin *elemente de tipul al doilea* și, în cazul general, de un *tip superior celui considerat.*

— Așadar, prin această metodă, antinomia lui Russell a fost eliminată și logicismul a fost salvat !

— Într-un fel, da, dar e cum spuneți dumneavoastră, doctorii, uneori: operația a reușit, dar pacientul n-a rezistat. Programul logicismului sub forma lui inițială a trebuit părăsit.

— Nu văd de ce ?

— Pentru că logicismul, pretindeau Frege și Russell, poate deduce întreaga matematică pură numai pe baza principiilor logice, *fără ajutorul* vreunei alte axiome matematice. Dar, pentru ca să stabilească teoria tipurilor, Russell și Whitehead au fost obligați să se bazeze pe trei axiome: axioma reductibilității, axioma infinitului și axioma alegerii, care sînt mai intim legate de domeniul matematic decît de cel logic, prin faptul că nu pot fi considerate ca

identității logice. Desigur că nu toți logisticienii au fost de acord cu teoria tipurilor și de atunci au fost făcute multe încercări, fie pentru a se îmbunătăți teoria tipurilor, ca să se poată evita axiomele care nu sînt de natură logică, fie prin înlocuirea ei cu alte metode de a evita paradoxul cu pricina.

— Mie, drept să vă spun, teoria tipurilor logice îmi pare ca o cîrpeală și încă una cusută cu ață albă ! Căci ce-i alta dacă, admițînd-o, logistica trebuie să renunțe tocmai la ceea ce stîrnise interes și curiozitate, prin noutatea ce o afirma ? Însuși Russell a trebuit să recunoască faptul că *matematica nu poate fi dedusă numai din principii logice, că nu este o știință pur deductivă, că nu este un joc gratuit al spiritului.*

— Da, *a trebuit* să renunțe, fiindcă noțiunea de clasă sau de mulțime nu era așa de simplă cum părea la prima vedere, ci, din contra, ea s-a dovedit chiar destul de complexă și definirea ei mai dă încă multă bătaie de cap.

— De aceea, eu am să iau iarăși cartea lui Poincaré ca să-l las pe el să-și dea părerea despre logistică. Parcă-l văd cu cîtă satisfacție și-a muiat condeiul în călimară și a scris : „Logistica nu mai este stearpă, ea naște antinomia". (5, p. 211) După ce a scris această frază a luat sugativa și a apăsat-o, mîngîind-o ușor, peste rîndurile ude. Tu, Nucule, nu știi ce înseamnă să scrii cu condeiul, să-l moi în cerneală și să fii atent ca nu cumva, din cauza unui prea mare impuls interior, să împroști hîrtia cu cerneală. Toate acestea au dispărut de cînd se scrie cu pixul. Dar Poincaré nu a știut ce-i pixul, poate că nici stiloul, deși el a fost inventat de Petrache Poenaru al nostru la jumătatea secolului trecut. Îl văd pe Poincaré cum a zîmbit pe sub mustață, cum s-a scărpinat în barbă recitind cele scrise și cum a adăugat pentru sine : „Nu-i stearpă, că a născut o odraslă, și încă ce odraslă, are să-i dea ea de furcă, nu glumă!" Și i-a dat !

— Bădie, Bădie, ce ți-a făcut logicismul, matale și profesorului ? V-ați unit amîndoi și vă faceți luntre și punte ca să-l atacați ! Să știți însă că nu aveți dreptate, fiindcă logicismul reprezintă un punct de vedere important și are multe merite în problema cercetării fundamentelor matematicii. Faptul că în ascensiunea lui spre culme i s-a pus în cale hîrtoapa paradoxului pe care l-am discutat, asta

era de aşteptat, fiindcă matematica nu se poate reduce la logică, dar aceasta nu înseamnă că logicismul trebuie părăsit ! El continuă să aibă mulţi adepţi, printre matematicienii de frunte care caută să stabilească diferite soluţii pentru rezolvarea problemei paradoxului acestuia şi ale altora ce s-au mai ivit după el. Sînt de altfel şi mulţi matematicieni care au căutat să stabilească fundamentele aritmeticii pe alte căi, tot logice. De exemplu, Richard Dedekind consideră că Aritmetica are o origine experimentală, dar că ea exprimă legile fundamentale ale gîndirii. În 1887 a publicat lucrarea sa de bază *Ce sînt şi ce reprezintă numerele* ? în care a stabilit o teorie logică a numărului natural şi a inducţiei complete, arătînd că noţiunea de număr întreg natural se poate deduce din noţiunile fundamentale ale teoriei mulţimilor : „Considerînd aritmetica (algebra, analiza) ca o parte a logicii", scria el, „presupun că noţiunea de număr este produsul imediat al legilor gîndirii. Răspunsul meu la întrebarea din titlu : ce sînt şi ce reprezintă numerele ? este următorul : numerele sînt creaţii libere ale spiritului omenesc, ele servesc ca un mijloc pentru a concepe mai uşor şi mai precis varietatea lucrurilor... ca puncte principale menţionez aici distincţia netă dintre finit şi infinit, conceptul de număr al lucrurilor, indicaţia că metoda de demonstraţie, cunoscută sub numele de inducţie completă [sau a raţionamentului de la n la $(n+1)$] are o reală forţă demonstrativă şi că definiţia prin inducţie (sau recursie) este determinată şi necontradictorie". (14, p. 263) Ideile sale au fost reluate, peste doi ani, de G. Peano şi transformate într-un sistem de cinci axiome pe care le-a exprimat în limbajul simbolic al formalismului logic. Acestea sînt : „1) zero este un număr întreg, 2) zero nu este următorul nici unui număr întreg, 3) următorul unui număr întreg este un număr întreg, 4) două numere întregi sînt egale dacă au acelaşi succesor, 5) dacă o teoremă este adevărată pentru numărul 1 şi se demonstrează că este adevărată pentru $(n+1)$, cu condiţia ca să fie adevărată pentru n, ea rămîne adevărată pentru toate numerele întregi". Cu ajutorul acestor axiome, Peano a stabilit toate teoremele din aritmetică şi a exprimat demonstraţiile ca pe o culegere de formule. Acest fapt a însemnat un mare succes pentru logica simbolică, iar Peano a ţinut să accentueze că în

acest fel nu au fost stabilite nimic altceva decît analogii de structură între operaţiile matematice şi acelea ale logicii.

— Adică, vrei să spui că pentru Peano, aritmetica nu se reducea la logică, aşa cum pretindeau Frege şi Russell ?

— Nu, deşi, după cum vedeţi, a fost şi el un logician ! Şi, acestea fiind zise...

— Îmi iau, de data asta, singur permisiunea de a fixa subiectul pentru miercurea viitoare. Fiindcă problema paradoxurilor mi se pare extrem de interesantă şi m-a preocupat odată, demult, pe cînd eram student... mai ţin minte povestea cretanului mincinos... nu aţi vrea să dedicăm o şedinţă acestei teme ?

— Noi doi am fost „gînd în gînd şi inimă-n inimă", dragă doctore. Să vedem ce spune prietenul Teodor, căci dacă vom fi majoritatea, gata !

— Pe mine subiectul acesta m-a interesat întotdeauna, iar Nucu, cînd era elev, nu odată mă trăgea de limbă, doar, doar are să mai afle ceva nou !

— Atunci era simplu de tot, fiindcă eu puneam întrebările şi dumneavoastră îmi răspundeaţi ! Acum de, mă cam tem, dar n-am ce face, după cum a spus Bădia, majoritatea decide !

V

PIATRA DE ÎNCERCARE

— Ultima oară cînd ne-am văzut, aţi pomenit, stimate doctore, de paradoxul cretanului mincinos. Ştiţi că forma lui cea mai scurtă este : „eu mint" ?

— Nu, nu am ştiut şi îmi pare rău că nu pot fi de acord ca *acest atom, această variabilă de enunţ* — ca să mă exprim în limbajul pe care l-am învăţat săptămîna trecută — *să fie un paradox* ! Pentru mine, paradoxul trebuie îmbrăcat într-o propoziţie mai acătării din care să-mi sară în ochi absurditatea ! Îi cu totul altceva cînd vine la mine un cretan şi-mi afirmă că *toţi cretanii sînt mincinoşi* ! Atunci mă întreb, aproape fără să vreau : — Cum de afirmă el aşa ceva ? Doar şi el e cretan ! Pe cînd aşa, dacă vii şi-mi spui : *eu mint,* te compătimesc sau cel mult ţi-aş putea admira sinceritatea !

— Dar după ce criterii stabiliţi dumneavoastră absurditatea unei propoziţii ?

— Ştiu eu ? Uneori mă avertizează bunul simţ, alteori opinia publică...

— Nu consider că acestea pot fi criterii serioase pentru stabilirea unui paradox ! Se cunosc destule exemple de propoziţii ce păreau cîndva absurde şi azi sînt considerate ca perfect normale. Eu cred că ar fi mai natural dacă ne-am gîndi la sensul cuvîntului şi să deducem din el principiul după care să ne orientăm pentru a-l identifica. *Paradox* înseamnă un enunţ vădit contradictoriu, fiindcă *A* şi non-*A* sînt afirmate în acelaşi timp !

— Grecii numeau o atare propoziţie şi *antinomie* (contradicţie) şi *aporie* (nesiguranţă, greutate imposibil de rezolvat).

— Ai dreptate, dragă Toa. Am aici și lucrările cunoscutului matematician și filosof francez Albert Lautman, reeditate de curînd la Paris de către admiratori, ca un omagiu adus memoriei lui căci, ca și Galois, el a murit de tînăr și n-a avut cînd să-și dezvăluie talentul lui matematic. Aceste rînduri îmi par foarte potrivite acum : „Matematica s-a construit ca și Fizica ; faptele ce trebuiau explicate au fost de-a lungul istoriei paradoxurile pe care progresul gîndirii le-a făcut să fie înțelese, datorită unei reînnoiri constante a sensului noțiunilor esențiale. Numerele iraționale, infinitul mic, funcțiile continue fără derivată, transcendența lui e și π, transfinitul, au fost admise dintr-o necesitate de neînțeles a faptelor mai înainte de a avea o teorie deductivă". (20)

— Mulțumesc pentru ajutor, Bădie. Știindu-te alături de mine am parcă mai mult curaj să atac pe acest invulnerabil maestru al neurochirurgiei ieșene, acum cînd l-am prins la cotitură și fără bisturiu în mînă ! — Iată, am venit la dumneavoastră, stimate doctore, și vă spun spășit : *eu mint*. Mă credeți ?

— Desigur, doar ești om de cuvînt !

— Bine, dar dacă eu afirm *că mint*, înseamnă că am spus *un adevăr* și nicidecum o minciună. Așadar, mint sau nu mint ? Căci *A* și non-*A* sînt adevărate în același timp !

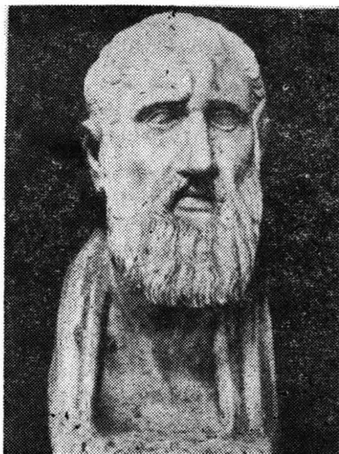
— M-ai bătut, recunosc paradoxul ! Dacă aș fi spus că *nu te cred* și că minți, ar fi rezultat că *ai spus adevărat că minți*, adică din nou cele două enunțuri contradictorii *A* și non-*A* ar fi fost prezente !

— Sclipitoare minți mai aveau și discipolii școlii din Megara. Întemeietorul școlii a fost *Euclid* din Megara, nu cel al nostru, autorul *Elementelor*. Acesta a fost elevul lui Socrate și paradoxul mincinosului se pare că a fost inventat de Eubulides din Milet, de asemenea discipol al Școlii din Megara și probabil contemporan cu Aristotel. Își ziceau *eristici*, fiindcă plăcerea lor cea mai mare era să poată discuta în contradictoriu, și, mai ales, să arunce astfel săgeți Școlii din Atena.

— Grozave săgeți ! Aruncau cîte o frază care frămînta mințile omenești zeci de veacuri în șir !

— Parcă numai megaricii au atacat Școala din Atena ? Eleații ce cusur aveau ? Paradoxurile lui Zenon, elevul

lui Parmenide, nu şi-au păstrat şi ele prospeţimea ? La fel de nerezolvate atunci ca şi acum, paradoxul lui Ahile, al săgeţii, al dihotomiei sau al stadionului au atacat, atunci, în secolul al V-lea î.e.n. ipoteza despre structura continuă a spaţiului, concepţia atomistică, noţiunea de mişcare sau aceea de infinit, potenţial şi actual, punînd astfel în evidenţă caracterul dialectic, contradictoriu, al cunoaşterii şi existenţei.



Zenon

— Nu trebuie să uităm că lansarea paradoxurilor era la modă printre filosofii greci, aceasta fiind o metodă de a se combate între ei. De pildă, se crede că paradoxul cretanului mincinos a fost imaginat ca să atace prin el *noţiunea de adevăr absolut*, susţinută în şcoala lui Platon şi în aceea a lui Aristotel.

— Tot din Antichitate este şi paradoxul lui Larvatus. Aţi auzit de el, dragă profesore. Eu nu l-am găsit pînă acum în nici o carte.

— Nu, n-am auzit de el. Unde l-ai găsit ?

— Nu l-am găsit eu, ci Bădia. Îl citează Beth (21) şi e dat sub formă de dialog.

— E tot de origine grecească ?

— Cred că da, căci Beth dă ca sursă pe Lucian.

— Atunci da, trebuie să fie Lucian din Samosata, epicurianul, care a trăit cam prin secolul al II-lea e.n. Şi care-i este cuprinsul ?

— Iată-l: „— Cunoşti pe tatăl tău ? — Desigur ! — Eu mă îndoiesc. Dacă-ţi arăt acum un om mascat şi te întreb cine-i acesta, ce ai să-mi răspunzi ? — Că nu-l cunosc. Dar tot aşa mi-ai fi răspuns şi dacă mascatul ar fi fost tatăl tău ! Or, dacă nu ai putut cunoaşte pe acest om mascat, nu l-ai fi cunoscut nici pe tatăl tău !".

— Interesant paradox. După cîte văd, el combate *postulatul evidenţei* despre care vorbea Aristotel.

— Tot în cartea lui Beth am mai găsit un paradox, pe care autorul l-a reconstruit, pornind de la indicaţiile găsite în cartea lui Diogene Laerţiu: *Despre vieţile şi doctrinele filosofilor*, scrisă în prima jumătate a secolului al III-lea e.n. El de asemenea este pus în formă de dialog, şi îl citez exact cum îl prezintă Beth: — „Priveşte ce păr frumos are acest om pe cap. Crezi că dacă i-aş smulge un fir de păr ar arăta mai rău ? — Nu. — Dar dacă i-aş smulge mai multe fire, l-ar urîţi ? — Nici într-un caz ! — Atunci pot să-i smulg pe rînd atîtea fire cîte doresc şi omul va păstra frumuseţea părului din capul său ?

— Oare acest paradox nu se referă la teoria infinitului potenţial, discutată de Aristotel ? El pune în evidenţă că numai dintr-o mulţime infinită s-ar putea scoate o mulţime finită, fără ca aceasta să se epuizeze.

— S-ar putea să aveţi dreptate, stimate doctore, dar Grigore Moisil e de altă părere. În cartea din care v-am citit data trecută, (19, p. 236) el îl leagă de „imposibilitatea de a da o clasificare corectă... Paradoxul chelului apare aici ca şi în alte probleme de definiţie a unor concepte... Dacă am spune că un om, ca să nu fie chel, trebuie să aibă 40 000 fire de păr, şi-i ajung atîtea, atunci dacă un om ar avea chiar 40 000 fire de păr, deci n-ar fi chel, smulgîndu-i un singur fir de păr însă, el ar trebui să fie clasificat printre cheli".

— Ca să-i fac o plăcere lui Nucu, dat fiind că el se dă în vînt după silogisme, am să adaug că acest paradox apare ca un *polisilogism*, sau, cum se spune în logică, ***un** sortit* !



Grigore C. Moisil

— Totuşi nici sugestia doctorului nostru cu privire la problema infinitului nu trebuie trecută cu vederea Ea a preocupat mult pe filosofii greci, şi în *Comentariile* lui Proclus asupra lui Euclid se găseşte un paradox de toată frumuseţea, pe care cred că-i cel mai simplu să vi-l citesc direct după traducerea pe care o am aici, în cartea lui Becker. (14, p. 303) „Aşadar, diametrul împarte cercul în două părţi egale. Dar, dacă un diametru generează două semicercuri şi dacă se duc prin centru o infinitate de diametre (semicercurile) vor deveni ca număr de două ori mai multe decît infinitatea (diametrelor). Acest lucru a fost resimţit de unii ca o aporie la împărţirea infinită a cantităţii. Noi însă spunem că, desigur, cantităţile se împart la infinit, dar nu într-o infinitate de părţi. În primul caz se permite ca părţile infinit de multe să existe în act, în al doilea caz însă numai în potenţialitate; prima dă infinitului existenţa (substanţa), a doua îi dă numai devenire".

— Această problemă a preocupat şi pe scolastici în Evul Mediu şi, cu multă pasiune, a fost discutată de matematicienii din Renaştere. De exemplu, despre punctele a două cercuri concentrice sau despre acelea de pe latura unui pătrat şi de pe diagonala lui se afirma că deşi pot fi puse în corespondenţă, în primul caz prin razele lor, în cel de-al doilea caz prin perpendicularele pe latură, nu sînt la fel de multe în infinit, căci lungimile cercurilor sau a laturii şi a diagonalei nu sînt la fel de mari !

— Să nu uităm, Bădie, nici de paradoxul lui Galileu pe care-l discută în „Ziua întîi" din *Discorsi*, unde găseşte că

există tot atîtea pătrate cîte numere întregi, deşi este evident că numărul pătratelor trebuie să fie mai mic !

— Da, dar cea mai importantă culegere de paradoxuri a făcut-o Bernhard Bolzano în cartea pe care a intitulat-o chiar *Paradoxurile infinitului* şi a apărut la Praga, în 1851. E de-a dreptul impresionantă stăruinţa cu care Bolzano vrea să-şi convingă contemporanii că în cazul mulţimilor infinite există posibilitatea de a pune în corespondenţă biunivocă o parte cu întregul. Dar ar pierde tot farmecul dacă nu v-aş citi un fragment în original.

— Se poate, Bădie, l-ai trădat pe Poincaré ?

— Deloc, nu te teme că-i vine rîndul şi lui ! Acum însă e Bolzano pe listă :

„Înseşi exemplele de infinit considerate pînă acum ne-au putut permite să înţelegem că nu toate mulţimile infinite ar trebui tratate la fel din punct de vedere al multiplicităţii lor şi că, dimpotrivă, unele din ele ar fi mai mari (sau mai mici) decît altele, adică una ar include în sine pe alta ca o parte (sau dimpotrivă, ar fi ea însăşi o simplă parte a celeilalte). Chiar şi această afirmaţie sună ca un paradox. Şi, desigur, toţi care definesc infinitul ca ceva care nu mai este susceptibil de mărire trebuie să găsească ideea că un infinit ar fi mai mare decît alt infinit nu numai paradoxală, ci chiar contradictorie".

— Este extraordinar şi de-a dreptul impresionant ! Cînd a murit Bolzano ?

— În 1848.

— Aşadar, nu a mai apucat nimic din minunile lui Cantor ? El nu a putut şti nimic de mulţimile numărabile şi nenumărabile, de şirul alefilor, aşa cum nu ştiam nici eu nimic despre ele, cu cîteva săptămîni mai înainte !

— Nu, Bolzano nu a putut şti cum se vor dezvolta problemele asupra infinitului, care se poate ghici din această carte cît l-au interesat ; în schimb Cantor a citit cartea lui Bolzano şi desigur că a fost inspirat de ea ! De altfel, Cantor vorbeşte despre această lucrare de mai multe ori. Şi chiar acum am să caut cîteva rînduri scrise de Cantor ca să vi le citesc. Iată, am şi găsit, tot în Becker, la pagina 324 : „Totuşi, infinitul propriu-zis, aşa cum îl găsim în mod exemplar în mulţimile bine definite... a găsit cel mai hotărît apărător într-un matematician şi filosof extrem de subtil

din secolul nostru, în Bernhard Bolzano, care a dezvoltat opiniile sale respective mai ales în scrierea frumoasă și bogată în conținut, *Paradoxurile infinitului*, scriere al cărei scop este de a arăta cum contradicțiile căutate în infinitate, de scepticii și peripateticii *tuturor timpurilor* nu există deloc, dacă ne dăm numai osteneala, desigur nu totdeauna ușoară, de a înțelege în sine conceptele infinității cu toată seriozitatea potrivit conținutului lor adevărat..." Mai departe, (p. 326) spune : „Bolzano este poate singurul la care numerele infinite ajung să aibă o oarecare legitimitate, cel puțin este vorba de mai multe ori despre ele ; totuși, tocmai în felul cum le mînuiește fără să poată prezenta o definiție justă despre ele, eu nu sînt deloc de acord cu el... Pentru înțelegerea reală a conceptului de numere determinat-infinite, autorului îi lipsește atît *conceptul* general de putere, cît și *conceptul* precis de *număr*".

— Bolzano a fost unul dintre cei mai mari analiști de la începutul secolului al XIX-lea ; el are meritul de a fi introdus rigoarea în demonstrațiile matematice, dar numai Georg Cantor a avut curajul să apuce taurul de coarne, ca să nu-i spun pe nume infinitului actual. El a îndrăznit să-l privească direct în față, introducînd noțiunea de *număr cardinal* sau de *putere* a unei mulțimi infinite. Dar, pentru această îndrăzneală, Cantor și-a primit pedeapsa cuvenită : „Jalnic ard de viu, chinuit ca Nessus".

— Nu-i rea comparația !

— Pentru dumneavoastră s-ar putea, dar eu nu-i înțeleg tîlcul ! Pentru ce uitați că nu sînteți singuri !

— Ce putem face, dragă doctore, dacă avem printre noi un tînăr care gîndește-n versuri, mai ales cînd comparația se și potrivește ? Căci știți ce i s-a întîmplat lui Cantor ? A dat peste un paradox, poate cel mai îngrozitor paradox pe care l-ar fi putut întîlni el, cunoscut azi sub numele de *paradoxul celui mai mare număr cardinal.*

— Cum vine asta ? S-a repetat povestea Frege-Russell ? Cînd ? În ce formă ?

— Povestește tu, Nucule, că o știi cel mai bine.

— Paradoxul descoperit de Cantor este următorul : Considerăm mulțimea tuturor mulțimilor ce există în Univers. Această mulțime are un număr cardinal și acest număr cardinal trebuie să fie *cel mai mare număr cardinal*

posibil, fiindcă în afara acestor mulţimi nu mai există altele.

— Da, asta e clar, dar unde-i paradoxul ?

— Tocmai că nu-i clar deloc, fiindcă acest număr cardinal nu-i cel mai mare !

— Nu-i cel mai mare ? Dar atunci care-i cel mai mare ?

— Găsiţi-l dumneavoastră ! Amintiţi-vă ce teoremă a stabilit Cantor despre mulţimea tuturor submulţimilor unei mulţimi ?

— Fantastic ! Vă spun drept că mi s-a tăiat răsuflarea ! E adevărat că *mulţimea tuturor submulţimilor tuturor mulţimilor din Univers*, are un număr cardinal şi mai mare !

— Ei bine, Cantor a descoperit această antinomie în 1895, dar nu a comunicat-o decît lui Dedekind într-o scrisoare şi faptul s-a descoperit abia în 1932, cînd a fost publicată corespondenţa lui. Am avut aşadar dreptul să-l citez pe Eminescu ? Vă închipuiţi cît l-a chinuit pe Cantor această descoperire ? În scrisorile lui către Dedekind vorbeşte despre „multiplicităţi absolute infinite sau inconsistente". Iată chiar o frază de-a lui din 1899: „După cum ne convingem uşor, de pildă, *totalitatea a tot ce poate fi gîndit* este o astfel de multiplicitate: mai tîrziu vom întîlni şi alte exemple"! Acum să vedem ce scrie Beth (7, p. 177) despre paradoxul lui Cantor: „noutatea descoperirii nu a întîrziat să circule: În iunie 1901 a ajuns şi la urechile lui Russell care l-a transformat în alt paradox, de o structură logică mai simplă".

— Asta-i prea de tot ! Vestitul paradox al lui Russell nu-i stabilit de el ? Miroase a plagiat !

— Nu tocmai. E mai cuminte să-i spunem inspiraţie ! Dacă Russell nu ar fi avut geniala lui putere de înţelegere şi de judecată, putea să audă zeci de paradoxuri şi tot degeaba era ! Russell a sesizat imediat că paradoxul se introduce prin noţiunea de mulţime care se conţine pe ea însăşi ca element şi atunci a găsit şi paradoxul clasei tuturor claselor, pe care Frege nu l-a observat, şi a propus teoria tipurilor ca una dintre soluţii. Dar, fiindcă mata, Bădie, ai cartea lui Becker în faţă, n-ai vrea să ne citeşti chiar paragraful despre teoria tipurilor, tradus din vol. I din *Principia Mathematica*, mai ales că data trecută n-am mai avut timp să ajungem la el ?

…ai simplu. Întîi vorbește de „Principiul …: „o analiză a paradoxurilor care trebuie … că toate provin dintr-un cerc vicios de un … Greșelile de acest gen iau naștere din supoziția …ie de obiecte poate conține elemente care pot … numai cu ajutorul colecției ca întreg... Principiul …dă putința de a evita totalitățile nelegitime poate …lat astfel: Ceea ce implică totalitatea unei colecții …uie să aparțină colecției. Vom numi aceasta „principiul cercului vicios", deoarece el ne dă putința de a evita greșelile de tipul cercului vicios implicate în supoziția totalităților nelegitime... Astfel, atît prin principiul cercului vicios, cît și prin intuiție directă ajungem la concluzia că funcțiile pentru care un obiect dat *a* poate fi argument nu sînt capabile să fie argumente la rîndul lor pentru aceasta și că ele nu au nici un termen comun cu funcțiile pentru care ele pot fi argumente. Astfel sîntem conduși să construim o ierarhie... Pentru a rezolva contradicția privitoare la clasa claselor care nu sînt elementele lor însele, vom presupune că o propoziție despre o clasă trebuie să se reducă totdeauna la o afirmație asupra unei funcții logice care definește clasa, adică asupra unei funcții care este satisfăcută de elementele clasei, și nu de alte argumente. Astfel, o clasă este un obiect derivat dintr-o funcție logică și presupune o funcție... De aceea o clasă nu poate fi niciodată argument al funcției care o definește... Astfel, dacă *x* este o clasă, propoziția „*x* este un element al lui *x*" este fără sens și de aceea expresia „clasa tuturor claselor care nu sînt elemente ale lor însele" nu are nici un sens". (14, p. 356)

— Spune că *nu are nici un sens*, dar de aici și pînă la înlăturarea paradoxurilor e cale lungă. De altfel, matematicienii nu s-au speriat așa de tare de ele ca să le evite, ci, din contra, se simțeau așa de bine în tovărășia lor încît au căutat să-și mai inventeze altele noi! Însuși Russell a mai fabricat unul: *paradoxul bărbierului!*

— Dar ce are bărbieritul cu logistica?

— Are, de ce să n-aibă? Judecați și dumneavoastră singur: într-un sat nu exista nici un om cu barbă. Unii se rădeau singuri, iar pe alții îi rădea bărbierul, care era și el din sat. Bărbierul avea deci o funcție precisă: să radă

pe cei ce nu se rădeau singuri. Dar pe b…
bărbierea ?

— E bună ! La bărbier se duc numai cei ce *nu se* .
singuri, iar cei ce se bărbieresc singuri, nu recurg la t…
Dacă bărbierul nu-i spîn sau femeie, atunci antinom…
Russell e cu adevărat foarte amuzantă.

— Nu fiți așa de darnic cu aprecierile, stimate docto… ca să nu le epuizați prea devreme. De pildă, cum veți considera următoarea antinomie, formulată de un alt matematician despre care vom vorbi mult mai tîrziu, pe nume L. E. J. Brouwer : Locuitorii unei insule suprapopulate au hotărît să nu mai permită nimănui să se stabilească acolo. De aceea au difuzat un avertisment : cine va nesocoti hotărîrea și va veni în insulă va fi judecat și omorît, anume : dacă va spune un adevăr va fi împușcat și dacă va spune o minciună, va fi spînzurat. Totuși, un tînăr a apărut în insulă și dus la judecată a spus : „voi fi spînzurat". Iar judecătorii, după lungi și îndelungate discuții, l-au lăsat să locuiască în insulă.

— Antinomia aceasta e tot așa de sclipitoare ca și figura tînărului rămas în insulă ! Dacă l-ar fi spînzurat, atunci el a spus un adevăr și deci ar fi trebuit împușcat, dacă l-ar fi împușcat atunci ar fi spus o minciună și trebuia spînzurat, și-au spus judecătorii, aflînd și ei cu această ocazie ce-i acela un paradox ! Mai sînt și altele prin sacul dumneavoastră cu surprize ?

— Să mai căutăm ! Ce-ai zice, Nucule, de varianta lui Beth după antinomia lui Larvatus ?

— Adică despre antinomia *semnificării* sau a *denotației* ? Strașnică, numai că cere oleacă de discuție. Am să o încerc ! Problema se pune astfel : orice elev care a învățat despre logaritmi știe că $\log 343 > 2$, iar $343 = 7^3$; putem scrie deci $\log 7^3 > 2$. Să repetăm acest raționament și, prin analogie, să spunem : numărul 343 are 3 cifre, dar $343 = 7^3$ deci 7^3 are 3 cifre !

— Dar 7^3 are numai două cifre ! Așadar analogia a dus la un rezultat paradoxal.

— Da, ați intuit exact lucrurile. Matematicianul și logicianul A. Tarski a arătat că această pretinsă analogie dintre cele două raționamente nu-i admisibilă deoarece, în timp ce primul raționament se aplică la valoarea funcției

log x pentru valoarea $x=343$ a argumentului, în cel de-al doilea raționament nu mai intervine valoarea vreunei funcții care ar putea stabili analogia, ci o proprietate a argumentului și asta nu are nici o legătură cu raționamentul considerat. Problema aceasta se cunoaște în logica matematică sub denumirea de *logica funcțiilor de adevăr*. De pildă, *un număr* ca : log 343 este privit ca un *obiect logic* și el este un *simbol complet*, fiindcă *denotă* un obiect determinat. Din contra : log x este *un simbol incomplet*, fiindcă el conține o variabilă liberă x. Orice simbol incomplet reprezintă o funcție $y=f(x)$ sau $z=f(x, y)$, în cazul că z depinde de două variabile libere x și y. Același lucru se poate spune și despre o propoziție sau o frază $A(x)$: și ea este un simbol care are structura unui enunț ce conține o variabilă liberă, ea este o *funcție logică* sau o *funcție propozițională* de variabila x, după cum $B(x, y, z)$ este o funcție propozițională de 3 variabile independente x, y, z etc. Dacă se dă variabilei o anumită valoare, care exprimă o propoziție, simbolul ia o formă determinată care poate avea două valori, aceea de *adevăr* sau de *fals*. În cazul unei funcții propoziționale de două argumente independente, argumente care reprezintă propoziții, valoarea de adevăr a funcției depinde numai de valorile de adevăr ale variabilelor și nu de conținutul lor. De obicei se notează cu A adevărul și cu F falsul, iar Frege a extins distincția dintre *conotație* și *denotație* sau dintre *sens* și *semnificație* de la noțiuni la propoziții. În felul acesta, o propoziție compusă este o funcție de adevăr, dacă adevărul sau falsitatea ei depinde de adevărul sau falsitatea argumentelor ei. Fiindcă într-o funcție de adevăr valorile argumentelor sînt sau adevărul sau falsul, putem scrie că valoarea funcției însăși este A (adevărul) sau F (falsul). Să luăm un exemplu : fie argumentele x și y legate prin conjuncția „și", adică $f(x, y)=x \wedge y$. Valorile de adevăr sau fals ale acestei funcții le putem înscrie în următoarea matrice :

x	y	$f(x, y)=x \wedge y$
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	F

De aici se vede că valoarea de adevăr a conjuncţiei ($\wedge$) apare dacă şi numai dacă cele două propoziţii au amîndouă valoarea de adevăr; altfel ea are valoarea *F*, adică este falsă. Cred că un exemplu practic ne-ar lămuri încă mai bine. Propoziţia: *Cantor a creat teoria mulţimilor* are cu totul alt *sens* decît: *miercuri este ziua în care stăm de vorbă*. Ele au însă aceeaşi *semnificaţie*, aceea de adevăr. Dacă formez fraza: Cantor a creat teoria mulţimilor *şi* miercuri este ziua în care stăm de vorbă, această frază este o *funcţie de adevăr* şi *denotează* valoarea de adevăr *A*. Dar fraza: Bădia a creat teoria mulţimilor şi miercurea stăm de vorbă, este o funcţie de adevăr care denotează valoarea de adevăr *F*.

— Pînă nu te legi de mine, nu-ţi tihneşte! Ca pedeapsă, şterge-o şi fă-ne cafeaua!

— Parcă eu aşteptam altceva? Pînă atunci, descurcă-te mata, că ai un cerber bun în profesorul meu!

— Ce înseamnă să ne descurcăm? Ce, propoziţiile sînt ca nişte bomboane, fiecare învelită în staniol alb dacă-s adevărate şi roşu dacă-s false? În acest caz desigur că este simplu să faci tabele şi să stabileşti valoarea de adevăr a funcţiilor pentru fiecare operator în parte. Dar nu orice propoziţie se poate socoti ca adevărată sau falsă şi deci nici fiecare frază nu poate fi considerată ca o funcţie de adevăr. Cînd spun: mîine are să fie vreme frumoasă, cine-mi garantează adevărul sau falsitatea acestei afirmaţii? Cîte nu îndură, pe tema asta, bieţii meteorologi cînd anunţă timpul probabil!

— De fapt de această problemă s-au ocupat intens logicienii, mai întîi Boole, apoi Frege, şi după aceea Russell, Cantor, Zermelo ş.a. Toţi şi-au propus să stabilească sistematic logica claselor, ca pe un sistem deductiv. Şi aşa s-a descoperit, întîi de Cantor, apoi de Russell şi Zermelo, că pe această cale se poate ajunge la contradicţii.

— Pe mine mă tot rîcîie un lucru. S-a afirmat aici că Russell şi-a formulat paradoxul, după ce a aflat de paradoxul lui Cantor. Dar tot de aici am aflat că Zermelo a stabilit acelaşi paradox, independent de Russell. Atunci cum rămîne cu inspiraţia de origine cantoriană?

— Despre acestea povesteşte Constance Reid în cartea pe care a scris-o despre David Hilbert. (22) Zermelo, elevul lui Hilbert, se ocupa de mai multă vreme cu teoria lui

— Nimic mai simplu. Întîi vorbește de „Principiul cercului vicios“ : „o analiză a paradoxurilor care trebuie evitate arată că toate provin dintr-un cerc vicios de un anumit fel. Greșelile de acest gen iau naștere din supoziția că o colecție de obiecte poate conține elemente care pot fi definite numai cu ajutorul colecției ca întreg... Principiul care ne dă putința de a evita totalitățile nelegitime poate fi formulat astfel : Ceea ce implică totalitatea unei colecții nu trebuie să aparțină colecției. Vom numi aceasta „principiul cercului vicios“, deoarece el ne dă putința de a evita greșelile de tipul cercului vicios implicate în supoziția totalităților nelegitime... Astfel, atît prin principiul cercului vicios, cît și prin intuiție directă ajungem la concluzia că funcțiile pentru care un obiect dat *a* poate fi argument nu sînt capabile să fie argumente la rîndul lor pentru aceasta și că ele nu au nici un termen comun cu funcțiile pentru care ele pot fi argumente. Astfel sîntem conduși să construim o ierarhie... Pentru a rezolva contradicția privitoare la clasa claselor care nu sînt elementele lor însele, vom presupune că o propoziție despre o clasă trebuie să se reducă totdeauna la o afirmație asupra unei funcții logice care definește clasa, adică asupra unei funcții care este satisfăcută de elementele clasei, și nu de alte argumente. Astfel, o clasă este un obiect derivat dintr-o funcție logică și presupune o funcție... De aceea o clasă nu poate fi niciodată argument al funcției care o definește... Astfel, dacă *x* este o clasă, propoziția „*x* este un element al lui *x*“ este fără sens și de aceea expresia „clasa tuturor claselor care nu sînt elemente ale lor însele“ nu are nici un sens“. (14, p. 356)

— Spune că *nu are nici un sens*, dar de aici și pînă la înlăturarea paradoxurilor e cale lungă. De altfel, matematicienii nu s-au speriat așa de tare de ele ca să le evite, ci, din contra, se simțeau așa de bine în tovărășia lor încît au căutat să-și mai inventeze altele noi ! Însuși Russell a mai fabricat unul : *paradoxul bărbierului !*

— Dar ce are bărbieritul cu logistica ?

— Are, de ce să n-aibă ? Judecați și dumneavoastră singur : într-un sat nu exista nici un om cu barbă. Unii se rădeau singuri, iar pe alții îi rădea bărbierul, care era și el din sat. Bărbierul avea deci o funcție precisă : să radă

pe cei ce nu se rădeau singuri. Dar pe bărbier cine îl bărbierea ?

— E bună ! La bărbier se duc numai cei ce *nu se bărbieresc* singuri, iar cei ce se bărbieresc singuri, nu recurg la bărbier ! Dacă bărbierul nu-i spîn sau femeie, atunci antinomia lui Russell e cu adevărat foarte amuzantă.

— Nu fiţi aşa de darnic cu aprecierile, stimate doctore, ca să nu le epuizaţi prea devreme. De pildă, cum veţi considera următoarea antinomie, formulată de un alt matematician despre care vom vorbi mult mai tîrziu, pe nume L. E. J. Brouwer : Locuitorii unei insule suprapopulate au hotărît să nu mai permită nimănui să se stabilească acolo. De aceea au difuzat un avertisment : cine va nesocoti hotărîrea şi va veni în insulă va fi judecat şi omorît, anume : dacă va spune un adevăr va fi împuşcat şi dacă va spune o minciună, va fi spînzurat. Totuşi, un tînăr a apărut în insulă şi dus la judecată a spus : „voi fi spînzurat". Iar judecătorii, după lungi şi îndelungate discuţii, l-au lăsat să locuiască în insulă.

— Antinomia aceasta e tot aşa de sclipitoare ca şi figura tînărului rămas în insulă ! Dacă l-ar fi spînzurat, atunci el a spus un adevăr şi deci ar fi trebuit împuşcat, dacă l-ar fi împuşcat atunci ar fi spus o minciună şi trebuia spînzurat, şi-au spus judecătorii, aflînd şi ei cu această ocazie ce-i acela un paradox ! Mai sînt şi altele prin sacul dumneavoastră cu surprize ?

— Să mai căutăm ! Ce-ai zice, Nucule, de varianta lui Beth după antinomia lui Larvatus ?

— Adică despre antinomia *semnificării* sau a *denotaţiei* ? Straşnică, numai că cere oleacă de discuţie. Am să o încerc ! Problema se pune astfel : orice elev care a învăţat despre logaritmi ştie că $\log 343 > 2$, iar $343 = 7^3$; putem scrie deci $\log 7^3 > 2$. Să repetăm acest raţionament şi, prin analogie, să spunem : numărul 343 are 3 cifre, dar $343 = 7^3$ deci 7^3 are 3 cifre !

— Dar 7^3 are numai două cifre ! Aşadar analogia a dus la un rezultat paradoxal.

— Da, aţi intuit exact lucrurile. Matematicianul şi logicianul A. Tarski a arătat că această pretinsă analogie dintre cele două raţionamente nu-i admisibilă deoarece, în timp ce primul raţionament se aplică la valoarea funcţiei

log x pentru valoarea $x=343$ a argumentului, în cel de-al doilea raționament nu mai intervine valoarea vreunei funcții care ar putea stabili analogia, ci o proprietate a argumentului și asta nu are nici o legătură cu raționamentul considerat. Problema aceasta se cunoaște în logica matematică sub denumirea de *logica funcțiilor de adevăr*. De pildă, *un număr* ca : log 343 este privit ca un *obiect logic* și el este un *simbol complet*, fiindcă *denotă* un obiect determinat. Din contra : log x este *un simbol incomplet*, fiindcă el conține o variabilă liberă x. Orice simbol incomplet reprezintă o funcție $y=f(x)$ sau $z=f(x, y)$, în cazul că z depinde de două variabile libere x și y. Același lucru se poate spune și despre o propoziție sau o frază $A(x)$: și ea este un simbol care are structura unui enunț ce conține o variabilă liberă, ea este o *funcție logică* sau o *funcție propozițională* de variabila x, după cum $B(x, y, z)$ este o funcție propozițională de 3 variabile independente x, y, z etc. Dacă se dă variabilei o anumită valoare, care exprimă o propoziție, simbolul ia o formă determinată care poate avea două valori, aceea de *adevăr* sau de *fals*. În cazul unei funcții propoziționale de două argumente independente, argumente care reprezintă propoziții, valoarea de adevăr a funcției depinde numai de valorile de adevăr ale variabilelor și nu de conținutul lor. De obicei se notează cu A adevărul și cu F falsul, iar Frege a extins distincția dintre *conotație* și *denotație* sau dintre *sens* și *semnificație* de la noțiuni la propoziții. În felul acesta, o propoziție compusă este o funcție de adevăr, dacă adevărul sau falsitatea ei depinde de adevărul sau falsitatea argumentelor ei. Fiindcă într-o funcție de adevăr valorile argumentelor sînt sau adevărul sau falsul, putem scrie că valoarea funcției însăși este A (adevărul) sau F (falsul). Să luăm un exemplu : fie argumentele x și y legate prin conjuncția „și", adică $f(x, y)=x \wedge y$. Valorile de adevăr sau fals ale acestei funcții le putem înscrie în următoarea matrice :

x	y	$f(x, y)=x \wedge y$
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	F

De aici se vede că valoarea de adevăr a conjuncției ($\wedge$) apare dacă și numai dacă cele două propoziții au amîndouă valoarea de adevăr ; altfel ea are valoarea *F*, adică este falsă. Cred că un exemplu practic ne-ar lămuri încă mai bine. Propoziția : *Cantor a creat teoria mulțimilor* are cu totul alt *sens* decît : *miercuri este ziua în care stăm de vorbă.* Ele au însă aceeași *semnificație*, aceea de adevăr. Dacă formez fraza : Cantor a creat teoria mulțimilor *și* miercuri este ziua în care stăm de vorbă, această frază este o *funcție de adevăr* și *denotează* valoarea de adevăr *A*. Dar fraza : Bădia a creat teoria mulțimilor și miercurea stăm de vorbă, este o funcție de adevăr care denotează valoarea de adevăr *F*.

— Pînă nu te legi de mine, nu-ți tihnește ! Ca pedeapsă, șterge-o și fă-ne cafeaua !

— Parcă eu așteptam altceva ? Pînă atunci, descurcă-te mata, că ai un cerber bun în profesorul meu !

— Ce înseamnă să ne descurcăm ? Ce, propozițiile sînt ca niște bomboane, fiecare învelită în staniol alb dacă-s adevărate și roșu dacă-s false ? În acest caz desigur că este simplu să faci tabele și să stabilești valoarea de adevăr a funcțiilor pentru fiecare operator în parte. Dar nu orice propoziție se poate socoti ca adevărată sau falsă și deci nici fiecare frază nu poate fi considerată ca o funcție de adevăr. Cînd spun: mîine are să fie vreme frumoasă, cine-mi garantează adevărul sau falsitatea acestei afirmații ? Cîte nu îndură, pe tema asta, bieții meteorologi cînd anunță timpul probabil !

— De fapt de această problemă s-au ocupat intens logicienii, mai întîi Boole, apoi Frege, și după aceea Russell, Cantor, Zermelo ș.a. Toți și-au propus să stabilească sistematic logica claselor, ca pe un sistem deductiv. Și așa s-a descoperit, întîi de Cantor, apoi de Russell și Zermelo, că pe această cale se poate ajunge la contradicții.

— Pe mine mă tot rîcîie un lucru. S-a afirmat aici că Russell și-a formulat paradoxul, după ce a aflat de paradoxul lui Cantor. Dar tot de aici am aflat că Zermelo a stabilit același paradox, independent de Russell. Atunci cum rămîne cu inspirația de origine cantoriană ?

— Despre acestea povestește Constance Reid în cartea pe care a scris-o despre David Hilbert. (22) Zermelo, elevul lui Hilbert, se ocupa de mai multă vreme cu teoria lui

Cantor şi astfel, odată i-a comunicat antinomia pe care a găsit-o el şi care era aceea pe care Russell i-a transmis-o lui Frege. În 1904, Zermelo a demonstrat şi teorema că în orice mulţime *m* se poate stabili o bună ordonare.

— Cunosc teorema: înseamnă că există o relaţie $<$ astfel ca $(m, <)$ să fie bine ordonată.

— Însă atunci cînd am discutat despre ea nu am insistat, şi o fac acum, că demonstraţia acestei teoreme se bazează pe *axioma alegerii*, axioma care a avut mai mulţi precursori înainte de a fi fost formulată de Zermelo, printre ei şi Peano, care a stabilit-o în 1890, apoi Beppo Levi care a formulat-o în 1902.

— Axioma alegerii? Interesantă denumire. Ce vrea să însemne?

— Denumirea aceasta i-a fost dată de Zermelo şi ea se referă la o observaţie pe care a făcut-o el, urmărind demonstraţia lui Cantor ca să stabilească faptul că alef zero este cel mai mic număr cardinal transfinit, precum şi teorema că toate numerele cardinale transfinite se află în seria alefurilor. Zermelo a arătat atunci că nu numai în aceste două teoreme, dar şi în multe alte teoreme din analiză se face, în mod tacit, o presupunere ce nu se poate deriva din nici un principiu logic. Anume, se presupune că „fiind dată o mulţime *M* de mulţimi nevide, astfel ca să nu aibă între ele nici un element comun, există o mulţime care cuprinde cîte un singur element din fiecare mulţime care aparţine lui *M*. Această axiomă Zermelo a numit-o *axioma alegerii*. Ea este evidentă atunci cînd mulţimea mulţimilor *M* este finită, căci atunci se poate forma o mulţime în care se află cîte un element din fiecare mulţime din *M*, printr-un număr finit de operaţii de alegere. Chiar şi în cazul unei mulţimi infinite, se poate forma mulţimea despre care este vorba, dacă există *o regulă* care permite să se deosebească un element dintre celelalte elemente, aparţinînd fiecărei mulţimi în parte. Dar dacă o atare regulă nu există, atunci alegerea nu se poate face fiindcă operaţia necesară nu se sfîrşeşte niciodată.

— E foarte ingenios şi totodată pitoresc — după expresia lui Poincaré — exemplul propus de Russell ca să ilustreze această axiomă. Iată-l: Presupunem că se dă o mulţime infinită de perechi de ghete, adică o mulţime infinită de

mulţimi, fiecare avînd cîte două elemente. Deoarece gheata de pe piciorul drept se deosebeşte de cea de pe piciorul stîng, alegerea se poate face şi se obţine o mulţime care cuprinde toate ghetele de pe piciorul drept, sau stîng. Dar dacă în loc de ghete s-ar da o mulţime infinită de perechi de ciorapi, atunci metoda nu se mai poate aplica deoarece ciorapii nu se deosebesc de la un picior la altul.

— Această axiomă a fost și este mult discutată. Mulţi matematicieni consideră că nici nu înţeleg ce vrea să spună această axiomă, deoarece cuvintele *mulțime* și *există* nu sînt precis definite ! Alţii, din contra, au generalizat această axiomă sau au găsit propoziţii echivalente axiomei alegerii. Astfel A. Tarski a stabilit, în 1924, următoarele teoreme care *sînt echivalente* cu axioma alegerii.

1) Oricare ar fi numărul cardinal transfinit m, al unei mulţimi date, există egalitatea $m^2 = m$.

2) Dacă m, n, p, q sînt numere cardinale transfinite oarecare, așa fel că $m < n$ și $p < q$ atunci avem $m + p < n + q$.

De altfel, din axioma alegerii s-au stabilit multe consecinţe și nici una dintre ele nu a dus la vreo contrazicere. (9, p. 127)

— V-ați luat dumneavoastră cu vorba, ca să se adeverească proverbul cu pisica aceea care pleacă de-acasă şi şoarecii joacă pe masă ! Cu totul în altă direcţie intenţionam eu să îndreptăm discuţia.

— Poftim, și așa ne-am băut cafeaua, care a fost perfectă şi-ţi mulţumim pentru ea. Spune-ne ce te frămîntă ?

— Înainte de a continua discuţia noastră aș fi vrut să tragem o concluzie asupra a trei dintre paradoxurile pe care le-am discutat astăzi, acela al cretanului, al bărbierului și al insularului. La prima vedere ele par diferite unul de altul şi totuşi le putem considera ca variante pe aceeaşi temă ale unei funcţii de adevăr. Or, adevărul și falsul ne dau referințe numai asupra limbajului şi a gîndirii, dar nu și relații asupra semnelor logice cuprinse în aceste propoziții. De aceea, aceste trei paradoxuri nu aparţin logicii propriuzise și nici matematicii, ci *semanticii*. Semantica (în grecește *sema* înseamnă *semn*) este un capitol din logica simbolică şi se ocupă cu interpretarea unui sistem formalizat prin alt sistem formalizat, cu problema adevărului în limbajele formalizate etc. Aşa că aceste trei antinomii nu ne intere-

sează din punct de vedere logic sau matematic. Din contra, antinomia lui Russell cu privire la mulţimea tuturor mulţimilor se referă la o noţiune fundamentală din logică : aceea de mulţime sau clasă ; antinomia lui Cantor se referă la altă noţiune fundamentală din matematică : aceea de număr cardinal transfinit ; antinomia lui Beth, a denotaţiei : la noţiunea de semnificare a unei expresii matematice ! Şi acum, după ce am mai descurcat firele antinomiilor prezentate, aş vrea să vă mai vorbesc încă şi de altele, care ridică alte probleme. De pildă, despre paradoxul lui Burali-Forti, cunoscut şi sub numele de paradoxul celui mai mare număr ordinal.

— Era de aşteptat să existe şi un paradox al celui mai mare număr ordinal, odată ce există unul al celui mai mare număr cardinal ! Mă mir că a fost descoperit de altcineva şi nu tot de Cantor !

— Aveţi dreptate să vă miraţi, dragă doctore, şi cred că vă veţi mai mira odată cînd am să vă spun că el a fost descoperit tot de Cantor, odată cu paradoxul celui mai mare număr cardinal, dar nu a fost cunoscut decît după ce Burali-Forti l-a publicat în 1897. Cantor îl cunoştea din 1895 şi se pare că i l-a prezentat, în 1896, într-o scrisoare lui Hilbert, dar atunci nu s-a ştiut nimic despre aceasta şi astfel el poartă numele celui ce l-a adus la cunoştinţa publică. Iată paradoxul : După cum ştiţi, orice mulţime bine ordonată are un număr ordinal. Dacă ne referim la şirul numerelor ordinale, luate pînă la un număr ordinal dat, numărul lui ordinal depăşeşte cu 1 numărul ordinal la care ne-am oprit. Dacă ne gîndim la şirul tuturor numerelor ordinale existente în Univers, acest şir posedă un număr ordinal T, care este cel mai mare număr ordinal posibil. Însă dacă la şirul tuturor numerelor ordinale îl includem şi pe T, acest şir are ca număr ordinal $T+1$, deci mai mare decît T şi prin urmare T nu este cel mai mare număr ordinal !

— După observaţia care ai făcut-o mai înainte, aş putea spune că paradoxul lui Burali-Forti se referă la *noţiunea matematică de număr ordinal.*

— În adevăr, şi drept răsplată am să vă mai spun două, al lui Richard şi al lui Berry, pe care le citează şi Poincaré, aşa că sînt sigur că Bădia nu va putea rezista ispitei de a deschide *Science et Méthode.*

— Cred şi eu ! Adică de ce să nu le citesc chiar de acolo ? Iată articolul şi paradoxul lui Richard, aici la pagina 202. Te scutesc astfel să-ţi mai cauţi cuvintele. „Să considerăm", spune Poincaré, „toate numerele zecimale ce se pot defini cu ajutorul unui număr finit de cuvinte ; aceste numere zecimale formează o mulţime *E*, şi e uşor de văzut că această mulţime este numărabilă, adică diferitele numere zecimale din mulţimea *E* pot fi numerotate de la 1 la infinit. Să presupunem numerotarea efectuată şi să definim un număr *N* astfel : Dacă a *n*-a zecimală a numărului *n* din mulţimea *E*, este

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

atunci a *n*-a zecimală a lui *N* va fi :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

După cum se vede, *N* nu este egal cu numărul *n* din *E* şi cum *n* este un număr oarecare, *N* nu va aparţine mulţimii *E*, cu toate că ar trebui să aparţină, fiind definit printr-un număr finit de cuvinte".

— Acum, Bădie, dacă tot ai început să citeşti, te rog continuă şi cu paradoxul lui Berry.

— Numai că Poincaré nu scrie că paradoxul următor este al lui Berry, ci „domnul Russell citează încă o altă antinomie, destul de amuzantă". Aşa că te invit să-l spui singur, mai întîi ca să nu te înveţi cu nărav şi apoi pentru că exemplul dat de Poincaré nu-i chiar paradoxul lui Berry, ci o variantă a lui.

— În paradoxul lui Berry e vorba de definiţia unui număr. Fiindcă în orice dicţionar numărul cuvintelor cuprinse în el este finit, să considerăm toate frazele ce se pot face cu cel mult 50 de cuvinte alese din dicţionar. Numărul acestor fraze este şi el finit, fiindcă s-au format cu un număr finit de cuvinte. Din aceste fraze se aleg acelea care definesc numere naturale şi fie *T* mulţimea lor. Desigur că mulţimea *T nu cuprinde* toate numerele naturale, căci au rămas pe dinafară toate acele numere naturale care se definesc prin fraze ce cuprind *mai mult decît 50 de cuvinte.* Aceste numere le aşezăm în ordine crescătoare şi pe cel mai mic îl numim *numărul lui Berry.* Acest număr se defineşte astfel : „Numărul lui Berry este numărul cel mai mic care *nu* se poate

defini printr-o frază formată din cel mult cincizeci de cuvinte cuprinse în dicţionar". Acum să numărăm cuvintele prin care se defineşte *numărul lui Berry.*

— Nostim de tot ! Numărul cuvintelor din care este compusă definiţia lui este 27, adică mai puţin de 50, prin urmare *el nu există*, căci toate numerele formate cu mai puţin de 50 de cuvinte se află în mulţimea *T*, or, noi l-am ales din afara acestei mulţimi.

— Cred că aceste antinomii au dat de furcă matematicienilor, mai ales logisticienilor.

— Doar nu degeaba a scris Poincaré că logistica nu-i stearpă ! A ştiut el ce spune !

— Da, la început e adevărat că aceste antinomii, care răsăreau ca ciupercile după ploaie, erau o ameninţare serioasă pentru cei ce se străduiau să dovedească identitatea dintre matematică şi logică, dar după aceea s-au deprins cu ele şi le căutau explicaţii.

— Vreţi să spuneţi că logisticienii au continuat să rămînă logisticieni ?

— Bineînţeles ! Iată, am adus cu mine o foarte frumoasă cărticică scrisă de Hans Hahn (23), unul dintre întemeietorii *Cercului vienez*, grupare renumită care, prin conferinţele şi prin publicaţiile sale, a adus o largă contribuţie la problema fundamentării logicii şi a ştiinţelor naturii. Vreau să citesc numai un fragment din capitolul intitulat *„Logică şi realitate"*, deşi, dacă aş putea, mi-ar plăcea să recitesc toată cartea, de la început pînă la sfîrşit, aici, împreună cu dumneavoastră. Paragraful acesta este intitulat „Deducerea logică" : — Am ajuns la un punct fundamental ; convenţia pentru folosirea cuvintelor *nu* şi *sau* este de aşa natură că dacă formulez două enunţuri : *A este roşu sau verde* şi *A nu-i roşu*, prin aceasta am spus : *A este verde*. Aici este baza a ceea ce se numeşte *deducerea logică*. Ea nu se sprijină în nici un fel pe aceea că între anumite comportamente ar exista un raport de fapte pe care l-ar sesiza gîndirea : ea decurge numai din felul în care vorbim despre obiecte. Acela care nu vrea să admită deducerea logică, nu are, de exemplu, un alt mod de a vedea comportamentul lucrurilor, dar nu acceptă să folosească aceleaşi reguli, ca mine, ca să vorbească de ele. Noi nu ne putem înţelege : inutil de a continua conversaţia fiindcă nici unul nu cunoaşte limba celuilalt.

Iată ce ne aduce deducerea logică : ea ne dă conştiinţa de tot ce am afirmat, folosindu-se de convenţiile limbajului... pronunţînd cele două propoziţii : *A este roşu sau verde, A nu este roşu,* concomitent şi implicit afirmă că *A este verde*". În paragraful următor „La ce serveşte logica" spune : „Cititorul s-ar putea întreba atunci, la ce serveşte logica dacă este adevărat că enunţurile ei sînt tautologice şi nu exprimă nimic despre lucruri... Propoziţiile logice pe care le-am luat ca exemplu au derivat din convenţiile asupra folosirii cuvintelor *sau* şi *nu* ; se poate arăta că acelaşi lucru se petrece cu orice enunţ din ceea ce se numeşte logica propoziţiilor. Dar , mai întîi, de ce are nevoie limba de cuvintele *sau* şi *nu* ? Aceasta-i pentru că noi nu ştim totul, pentru că nu sîntem atotştiutori... Limba noastră este făcută astfel încît afirmînd unele propoziţii constatăm că am afirmat altele, legate de acelea în mod implicit ; noi nu le observăm imediat, deducerea logică ne permite să ne dăm seama de aceasta".

În capitolul următor „Matematica şi realitatea" găsim profesiunea de credinţă a logisticianului convins, motivînd de ce *matematica este tautologică* : „Propoziţiile ei, ca şi acelea ale logicii, nu spun nimic de obiectele despre care este vorba ; ele sînt tautologice şi nu tratează decît modul în care ne exprimăm despre ele. Dacă putem afirma, necondiţionat, că 2 +3 face oricînd 5, că 2 +2 nu poate fi niciodată 7, motivul este că prin 2+3 noi gîndim exact acelaşi lucru ca şi prin 5... Dar dacă 2+3 ne spune acelaşi lucru ca şi 5, ca să înţelegem aceasta trebuie să ne ducem cu gîndul înapoi, la ceea ce am convenit să gîndim prin 2, prin 3, prin 5 şi prin semnul + ; după aceea le transformăm prin tautologie pînă ce observăm că prin 2+3 noi ne gîndim exact la 5. Acest act de cascade tautologice eşalonate înseamnă *a calcula, a socoti* ; adunarea şi înmulţirea pe care le învăţăm la şcoală sînt pregătiri pentru aceste transformări tautologice. Orice demonstraţie matematică constă dintr-o serie de transformări de acest fel. Avantajul lor este că noi nu vedem dintr-odată, de exemplu, că 24×31 înseamnă acelaşi lucru ca şi 744, ci că operaţiile acestei înmulţiri sînt transformări progresive, de-a lungul cărora observăm că prin convenţiile acceptate la folosirea simbolurilor (numere, semnele + şi ×) se ajunge, odată trans-

formarea terminată, să gîndim același lucru ca și înainte de a o fi făcut, adică să știm că 744 este ceea ce se înțelege prin 24 × 31. Trebuie să mărturisim că demonstrarea caracterului tautologic al matematicii nu este încă bine stabilit în toate punctele ei ; aceasta este o problemă foarte anevoioasă și plină de greutăți, dar nu ne îndoim că ideea unei matematici tautologice prin esență este justă. Multă vreme s-a susținut cu îndîrjire contrariul ; în special Kant a persistat. Poincaré a adus argumente ca acestea : pentru că este imposibil ca matematica să fie o vastă tautologie, trebuie să cuprindă, undeva, un principiu apriori. În adevăr, e greu de crezut, dintr-odată, că matematica întreagă, cu propozițiile ei așa de anevoios stabilite, cu descoperirile ei adesea surprinzătoare, se poate reduce la tautologie. Dar să observăm că această argumentare uită un mic lucru : faptul că noi nu sîntem atotștiutori. Desigur că un spirit atotștiutor ar cunoaște deodată tot ce se afirmă simultan într-un grup de propozitii ; el ar ști imediat că din cauza convențiilor asupra simbolurilor numerice și a semnului × , gîndim la același lucru prin 744 ca și prin 24 × 31. Un atare spirit nu are nevoie nici de logică și nici de matematică. Dar nu-i acesta cazul nostru ; noi sîntem obligați, ca să ne dăm seama, să urmărim o întreagă cascadă de transformări tautologice ; de aceea avem o adevărată surpriză cînd constatăm că prin afirmarea unor enunțuri afirmăm ceva care pare să fie cu totul diferit, că anumite simboluri complexe cu aspect exterior foarte diferit, ne fac să gîndim, în fond, la același lucru".

— Dacă ne mai citești vreo două pagini ca acestea, eu cel puțin mai, mai că trec la logicism !

— Nu v-am crezut așa de slab de înger, dragă doctore ! Parcă erați intuiționist ? Voiam să mă opresc aici, dar mărturisirea dumneavoastră mă obligă să vă citesc și *Concluzia* cu care se încheie cartea. N-am dreptul să distrug elanul... Iată deci cum se desparte autorul de cititor : „Toate acestea sînt combătute, o știu. Ideile noastre ne obligă să luptăm pe două fronturi ; sîntem atacați pe de o parte de pretinsul *bun simț* ; nefiind curente, vederile noastre sînt considerate paradoxale ; dar acest *bun simț* ar trebui să se numească mai degrabă *simțul comun*, fiind doar rămășița vechilor obiceiuri de a gîndi, devenite, prin aceasta însăși, comode și scumpe ; acest simț comun — și inert — se apără de

tot ce nu-i este familiar. Avem să luptăm, de asemenea, contra simţului *profund* al metafizicii, care, în adevăr, este un nonsens. Dar chiar dacă adversarii noştri formează o majoritate considerabilă, întăriţi în poziţii milenare, sîntem siguri că succesul ne este asigurat, că ideile noastre progresează". Vreau să mai adaug că această carte a fost scrisă în anul 1934 şi e ultima carte a lui Hans Hahn, care a murit în acelaşi an. Previziunea lui nu a fost dezminţită, căci logicismul are foarte mulţi partizani, în ciuda celorlalte curente, la fel de îndîrjite să-şi apere convingerile lor !

— Şi credinţa lui Russell în logicism era tot aşa de statornică ; nici o antinomie nu i-a putut-o zdruncina.

— Ba chiar mai mult ! Era convins că *Principia mathematica* va dăinui cel puţin pînă în anul 2100 !

— De unde ştii mata asta, Bădie ?

— Am găsit undeva că matematicianul G. H. Hardy a scris despre visul pe care l-a avut odată Russell. El zicea că a fost un vis oribil. (18, p. 1 855)

— Cine zicea, Hardy ?

— Nu, Russell. Dar mie nu-mi pare chiar oribil ! Oricum rămîne să judecaţi dumneavoastră cu toţii.

— Asta după ce-l vom afla !



Godrey Harold Hardy

— Russell povesteşte că s-a visat, prin anul 2100, în etajul de sus al Bibliotecii Universităţii din Londra. Un asistent al Bibliotecii mergea pe lîngă rafturile cu cărţi, ducînd după el un coş enorm şi lua din raft cîte o carte pe care o privea şi apoi, fie că o arunca în coş, fie că o aşeza din nou în raft. În sfîrşit, a ajuns la trei volume mari, pe care Russell le-a recunoscut : era ultimul exemplar ce mai exista din *Principia Mathematica*. Asistentul a luat unul dintre volume, l-a răsfoit şi a rămas o clipă încurcat de curiosul simbolism pe care l-a văzut, apoi a închis volumul, l-a cumpănit în mînă şi a ezitat... În clipa aceasta s-a trezit.

— Aşa, fără să ştie ce s-a întîmplat cu volumele sale ?

— Cred şi eu, emoţia...

— Important este că volumele au rezistat pînă în anul 2100, adică un veac şi mai bine de acum înainte ! Aşa optimism, mai zic şi eu.

— Da, şi totodată un optimism rezonabil, căci Russell a recunoscut că simbolismul lui fusese depăşit. Asistentul nu mai cunoştea sistemul, de aceea s-a uitat curios la el. Acum îmi aduc aminte că am citit şi eu această poveste chiar într-o traducere românească. Cartea se cheamă : G. H. Hardy : *Crezul meu ? Matematica*, şi a apărut în Editura Enciclopedică Română , în Bucureşti, 1970. (p. 86)

— Ba, poate că era de altă specialitate şi atunci nu era obligat să cunoască notaţia introdusă de Russell !

— Adevărat, dragă doctore, aşadar... votaţi cu logicismul ?

— Stai, aşteaptă pînă data viitoare, cînd mi se pare că trebuie programat formalismul, dragă Nucule !

— Întocmai, cu David Hilbert ca figură centrală. Bine, am să aştept !

— Am să răspund atacului dumneavoastră cu o anecdotă, dealtfel bine cunoscută. Se spune că un sultan s-a hotărît să facă el însuşi judecăţile şi să nu le mai lase pe seama vizirului său. Aşadar, a ascultat pe împricinat şi cînd acesta a terminat să arate ce avea pe suflet i-a spus :

— Ai dreptate ! Apoi a venit la rînd şi cel pîrît. Şi acesta şi-a spus păsul, iar cînd a terminat, sultanul i-a zis şi lui : — Ai dreptate ! Atunci vizirul s-a aplecat la urechea sultanului şi i-a şoptit : — Luminăţia ta, nu se poate să aibă

dreptate şi păgubaşul, şi pîrîtul. La acestea sultanul a răspuns : — Şi dumneata ai dreptate !

— Exemplu tipic de logică trivalentă ! Aşadar, v-aţi întors la intuiţionism ?

— Habar n-am de cele ce-mi puneţi în cîrcă, dar vă suport învinuirile pînă ce mă voi familiariza şi cu formalismul, şi cu intuiţionismul ; pe urmă voi. hotărî.

— Sînteţi aşa de sigur că veţi putea-o face ? Matematicienii, adică mai bine zis cei ce înclină înspre filosofia matematicii, au timp să aştepte, uneori chiar milenii, pînă să ia o hotărîre : nu-i ca la dumneavoastră, cînd o amînare sau o nehotărîre în privinţa unei decizii poate fi fatală !

— Tocmai acest orizont larg, acest spaţiu din care a dispărut parcă timpul mă atrage şi mă linişteşte, ca muntele împădurit, ca marea nemărginită. De aceea, abia aştept să ne vedem miercurea viitoare, dacă nimic nu mă va împiedica !

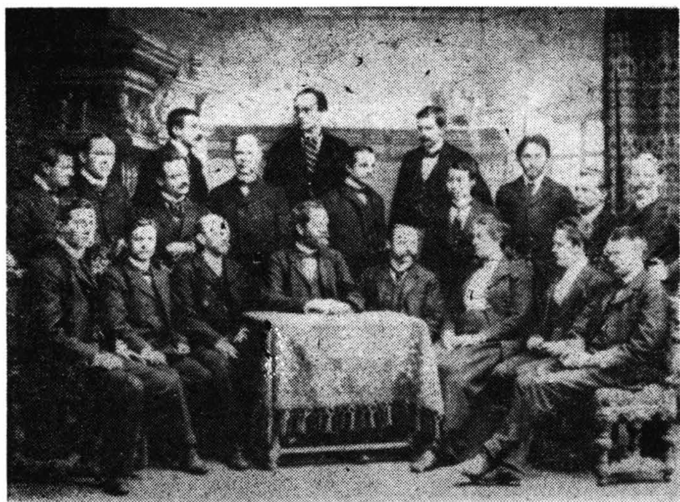
VI

ADEMENIT DE ILUZII...

— De la începutul săptămînii am aşteptat ziua aceasta ca pe o mare sărbătoare.

— Adică, vrei să insinuezi că celelalte miercuri nu ar fi fost sărbători ?

— Comparîndu-le cu cea de azi, nu. Aceasta de acum am văzut-o cu alţi ochi şi am aşteptat-o altfel, fiindcă aveam impresia că azi nu ne mai întîlnim, aici la mata, Bădie, ci în Sala de lectură a Universităţii din Göttingen !



Grupul de la Göttingen

— Cum ? Aşa dintr-odată, fără paşaport şi fără să ne întrebi şi pe noi dacă sîntem dispuşi să facem această călătoric ?

— Fără ! Ca să vă dovedesc, vă rog să priviţi această fotografie şi să vedeţi unde sîntem şi alături de cine stăm ! (22, p. 228)

— „Clubul matematicienilor din Göttingen". Da, societatea nu-mi dispalce, numai că pe vremea aceea, în 1902, nici unul dintre noi nu se născuse încă !

— Asta nu are nici o importanţă. Iată-l pe Felix Klein, întemeietorul şi animatorul clubului, pe David Hilbert, care a venit în Göttingen exact la 100 de ani după Gauss, ca să continue şi să întărească tradiţia ştiinţifică pe care o iniţiase cu un veac mai înainte marele Gauss : *Princeps matematicorum*, şi care, cu strălucirea minţii lui ne va lumina după amiaza aceasta, iată-l şi pe Zermelo, care ne răspunde şi nouă, cu acelaşi sarcasm ca şi tuturor celor noi veniţi la Göttingen, ce se mirau de numele lui : „Păi, să vedeţi, de fapt eu m-am numit *Walzermelodie*, dar, din economie, au fost suprimate prima şi ultima silabă. Iată-l şi pe Robert Courant, atunci student la Göttingen şi apoi profesor acolo, şi prietenul de o viaţă al lui Hilbert. Cînd Hitler a ajuns la putere, atît Courant, cît **şi aproape toţi** matematicienii



Robert Courant

din Göttingen au fost expulzaţi, în afara lui Hilbert. Departe de Hilbert, Courant şi-a manifestat mereu admiraţia şi dragostea pentru profesorul său. Iată şi *Cuvîntul înainte* pe care l-a scris el la cartea aceasta, în 1969, ca unul dintre puţinii supravieţuitori ai Clubului din Göttingen: „David Hilbert a fost unul dintre adevăraţii mari matematicieni din timpul lui. Opera lui şi personalitatea sa ştiinţifică inspiratoare au influenţat adînc dezvoltarea ştiinţei matematice pînă în timpul prezent. Viziunea lui, puterea lui de lucru în domeniul matematicilor şi originalitatea lui independentă, de gînditor, supleţea şi diversitatea preocupărilor lui a făcut din el un pioner în multe şi diferite domenii ale matematicii. Era o personalitate unică, profund cufundat în opera sa şi dedicat cu totul ştiinţei, un profesor şi un conducător de cel mai înalt nivel, inspirator, şi mai ales generos, neobosit şi statornic în toate strădaniile lui ..." Autoarea, Constance Reid, citează încă multe alte observaţii ale lui Courant, dar dintre ele am ales-o pe aceasta, legată de pasiunea lui Hilbert pentru grădinărie, în care se putea întrezări: „o fantastică balanţă între o intensă concentrare şi o completă relaxare (22, p. 109). Aici, în



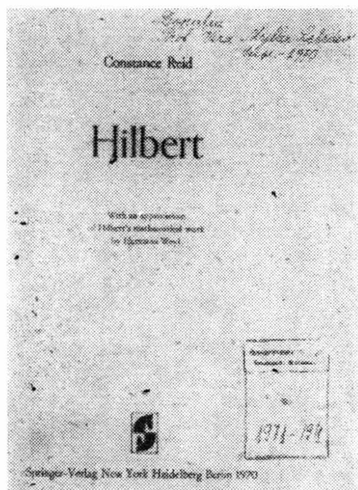
David Hilbert
şi Hermann Weyl

fotografia aceasta iată-l pe David Hilbert cu Hermann Weyl, cu trei ani mai în vîrstă decît Courant, care i-a fost mulți ani asistent și care a publicat, în 1944, după moartea lui Hilbert (februarie 1943) un articol : „David Hilbert și opera lui matematică", reprodus, sub o formă prescurtată în această carte, articol din care voi citi azi cîteva rînduri. Am găsit în cartea aceasta atîtea lucruri extraordinare, care m-au tulburat, că nici nu știu despre ce să vorbesc mai întîi ?

— Despre asta nici nu trebuie să ne spui ; s-a văzut de cînd ai pus cartea pe masă. De altfel, îți mărturisesc că ea m-a tulburat și pe mine și, după cît se pare, și pe colegul Teodor.

— E adevărat, numai că dintr-o pricină pe care nu cred că o bănuiești ! Privește ce scrie aici : „Donația prof. Vera Myller-Lebedev, Iași, 1970".

— Așa-i, Nucule, donatoarea acestei cărți a fost profesoara noastră la Algebră. Și a fost poate chiar mai răvășită decît tine citind această carte, căci ea a fost eleva lui David Hilbert și a trecut la el examenul de doctorat. Acolo a simțit ea primele vibrații ale creației științifice și a trăit acolo, la Göttingen, cei mai frumoși ani ai stu-



Coperta volumului „Hilbert"

denției. Ți-am spus acestea ca să vezi din cîte pricini diferite, privind o fotografie sau o carte, inima poate să bată mai tare ca de obicei.

— Dar poate că ar fi mai bine să terminăm cu poveștile noastre, ca să-l lăsăm pe Nucu să ne vorbească despre Hilbert și opera lui.



Vera Myller-Lebedev

— Atunci, ca o introducere la problema despre care vom vorbi astăzi, am să amintesc de cartea clasică a lui Hilbert, *Bazele geometriei*, publicată în 1899. În această lucrare, Hilbert a pus bazele riguroase ale geometriei elementare, folosind metoda axiomatică.

— Dar, după cîte știm noi, și Euclid a stabilit geometria tot pe bază axiomatică.

— Așa-i. Pînă în secolul al XIX-lea, geometria euclidiană a reprezentat modelul de știință axiomatizată. Prin asta se înțelege faptul că o teoremă apărea ca o *consecință* a unui număr finit de propoziții, numite axiome. Numai că această noțiune de consecință a cam încurcat treburile atunci cînd matematicienii au căutat să stabilească dacă nu cumva o anumită propoziție dată — să zicem axioma paralelor — nu este o consecință a altor axiome. Iar dacă

această întrebare şi-a găsit răspunsul prin crearea geometriilor neeuclidiene, metoda axiomatizării stabilită de Euclid îşi aştepta o nouă înfăţişare, aceea pe care i-a dat-o Hilbert.

Axiomatizarea, aşa cum a conceput-o Hilbert, este cu totul diferită de cea stabilită de Euclid. El a introdus punctul de vedere *abstract* în definirea noţiunilor elementare: punct, dreaptă, plan. Acestea sînt obiecte geometrice lipsite de orice conţinut intuitiv. Proprietăţile lor formale şi relaţiile dintre elementele fundamentale, specificate de termenii „a fi pe", „între", „congruente" ş.a. sînt stabilite prin cinci grupe de axiome, anume: axiome de incidenţă, de ordonare, de congruenţă, axioma paralelelor şi axiomele de continuitate.

În articolul despre care v-am vorbit, Weyl povesteşte că în 1891, pe cînd Hilbert asculta o conferinţă despre anumite probleme de geometrie, a făcut o observaţie care conţinea în sîmbure punctul lui de vedere axiomatic. Anume a spus: „ar trebui să fie posibil ca în toate teoremele de geometrie să se poată înlocui cuvintele: punct, linie şi plan cu masă, scaun şi halba de bere".

— Ştii că au mai fost şi alţii, înaintea lui Hilbert, care au gîndit aşa?

— Nu, cine?



Jean le Rond D'Alembert

— D'Alembert. În istoria matematicilor, scrisă de Bourbaki, se arată că în articolul din *Enciclopedie* relativ la „Definiții", d'Alembert are această observație : „s-ar putea face elemente de geometrie exacte (dar ridicole), numind triunghi ceea ce de obicei se numește cerc". (p. 34)

— Doar nu degeaba se spune că „nu-i nimic nou sub Soare" ! Lui Hilbert i se datorează nu numai metoda pe de-a întregul axiomatizată, dar și analiza sistematică și riguroasă a sistemului axiomatic prin discutarea condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească aceste axiome, dacă ele formează baza unei teorii deductive. Hilbert nu s-a limitat numai la formularea unui sistem de axiome din care să deducă geometria euclidiană, ci, după cum se poate observa din examinarea axiomelor enunțate, acestea au fost *ordonate* în grupuri de natură diferită. Se poate stabili astfel caracteristica fiecărui grup în parte, consecințele logice ce decurg din ele și chiar *diversele geometrii* ce se pot obține, prin suprimarea sau modificarea unora dintre axiome.

— Atunci să vedem ce condiții se impun, în general, unui grup de axiome ale unui sistem deductiv ?

— Sînt mai multe condiții, dar noi ne vom limita la următoarele trei : *necontradicția sau consistența* axiomelor, *suficiența* și *independența* lor.

— Condiția că axiomele să nu se contrazică între ele e foarte firească. La baza unei teorii deductive n-ar putea exista o axiomă *A* și, totodată, axioma contradictorie *non-A*. Dar nu înțeleg de ce ai legat *necontradicția* de *consistență* ?

— Aceasta este o problemă foarte complicată, stimate doctore. Necontradicția axiomelor și deci a teoremelor ce vor rezulta din ele nu-i chiar așa de ușor de stabilit. De pildă, din faptul că propozițiile aritmeticii nu sînt contradictorii, după experiența de milenii pe care o avem de cînd le cunoaștem și le folosim, putem afirma că axiomele pe care se bazează aritmetica sînt necontradictorii. Dar atunci cînd se stabilește un sistem de axiome, nu se poate ști dacă, odată, cine știe cînd, nu va apărea o teoremă alături de alta contradictorie ei, și aceasta, ca o consecință a sistemului de axiome. De aceea, condiția de *necontradicție* a unui sistem de axiome se înlocuiește prin condiția de

consistență. Aceasta înseamnă că putem afirma că un sistem de axiome este *consistent* (iar prin aceasta și necontradictoriu) dacă îl pot lega de o altă teorie *care se bazează pe un sistem de axiome necontradictoriu*. Hilbert, de pildă, a legat necontradicția axiomelor din geometrie de aceea a axiomelor din aritmetică, pe care le admitea că sînt necontradictorii.

— Adică sistemul de axiome ale geometriei despre care mi-ai vorbit este numai *consistent* ?

— Da, dar prin aceasta se admite că este necontradictoriu !

— Dar ce legătură a putut stabili Hilbert între aritmetică și geometrie ?

— Mi se pare că problema aceasta am discutat-o cîndva ! Prin introducerea sistemului de coordonate de Fermat și Descartes, s-a făcut în mod automat legătura dintre geometrie și aritmetică, fiindcă unui punct geometric îi corespunde unul sau mai multe numere. Așadar geometria întreagă poate fi tradusă în limbajul aritmetic !

— Ai dreptate, la asta nu m-am gîndit, deși aș fi putut-o face ! După cîte înțeleg, înseamnă că Hilbert nu a demonstrat necontradicția axiomelor geometriei, ci le-a aruncat în cîrca aritmeticii ! Bine, atunci să vedem mai departe : prin *independența* axiomelor cred că se înțelege faptul că axiomele sînt alese în așa fel încît adevărurile rezultate din una dintre ele să nu fie exprimate și de o alta. Cu alte cuvinte, să nu se considere mai multe axiome decît trebuie. Dar cu *suficiența* ce-i ? Ea nu este legată de independența axiomelor ?

— Da și nu. Numai într-o teorie care are la bază un *sistem suficient de axiome* se poate demonstra *orice teoremă* : *A* — sau non-*A* —, formulată în cadrul acestei teorii. În acest caz, teoria respectivă se numește *completă*.

— Dar asta-i la mintea cocoșului, că numai una dintre teoreme să poată fi demonstrată ! Altfel am ajunge doar la un sistem contradictoriu !

— M-ați înțeles greșit, stimate doctore ! Nu-i chiar așa de sigur că într-o teorie deductivă dată se poate demonstra orice teoremă : *A* sau non-*A*, formulată în cadrul acestei teorii. Nu-i vorba numai de *una dintre ele* și *nu de amîndouă*, ci *de niciuna dintre ele* ! Cu alte cuvinte, pot exista teoreme

care să nu poată fi demonstrate, oricît s-ar strădui matematicienii să o facă atunci cînd sistemul nu este *complet.*

— Acum am înțeles și cred că știu chiar și un exemplu : teorema celor patru culori !

— Da, asta și încă altele, despre care vom vorbi noi chiar azi.

— Spinoase probleme mai aveți și dumneavoastră matematicienii ! Una dintre ele rămîne totuși consistența aceea a geometriei. Necontradicția aritmeticii a putut fi dovedită ?

— Tocmai aici e hiba ! Ca să o dovedească, Hilbert și-a propus să axiomatizeze și aritmetica. După cum se știe, Euclid a prezentat aritmetica în *Elemente* ca pe o dezvoltare logică a tuturor teoremelor ei, pornind de la noțiunea de unitate. Este metoda numită genetică sau constructivă. În lucrarea apărută în 1900 cu titlul : *Despre conceptul de număr,* Hilbert a elaborat sistemul de axiomatizare a aritmeticii, luînd ca model metoda folosită de el în *Bazele geometriei.* „Punem întrebarea", scria el în această lucrare din 1900, „dacă în realitate metoda genetică este singura adecvată pentru studiul conceptului de număr, iar metoda axiomatică pentru bazele geometriei ? ... Părerea mea este următoarea : în ciuda înaltei valori pedagogice și euristice a metodei genetice, metoda axiomatică merită totuși prioritate la expunerea definitivă și garantarea logică a conținutului cunoștinței noastre. În teoria conceptului de număr, metoda axiomatică se formulează astfel : Gîndim un sistem de lucruri ; numim aceste lucruri numere și le notăm cu *a, b, c,* ... Gîndim aceste numere în anumite relații reciproce a căror descriere precisă și completă are loc prin următoarele axiome" (14, p. 384). În cazul aritmeticii, Hilbert a stabilit numai patru grupuri de axiome : 1) axiome de incidență, 2) de calcul, 3) de ordonare și 4) axiome de continuitate. Dar în afară de axiomatizarea aritmeticii el nu a mers mai departe, căci au rămas nedemonstrate independența și necontradicția axiomelor aritmeticii. În anii imediat următori însă s-a întîmplat un eveniment care „putea să aibă un efect catastrofal pentru matematică" — aceasta este chiar expresia lui Hilbert. Îl ghiciți care ?

— Cred că trebuie să fie vorba de apariția cărții lui Russell, în 1903.

— Aveţi perfectă dreptate, stimate profesore. Hilbert a citit-o şi astfel a aflat de antinomia lui Russell tocmai atunci cînd el se frămînta să găsească o modalitate de a stabili necontradicţia aritmeticii !

— Asta i-a venit, exact cum se spune, „colac peste pupăză".

— De aceea, la Congresul Internaţional al matematicii, care s-a ţinut în 1904, la Heidelberg, a renunţat la subiectul pe care se pregătea să-l prezinte, ca să-şi îndrepte atenţia către fundamentele aritmeticii. El a vorbit acolo despre „Bazele logicii şi ale aritmeticii", arătînd că există o cale prin care antinomia lui Russell ar putea fi eliminată, fără a aduce prea multe îngrădiri matematicii, căci şi el considera, ca şi Cantor, că „esenţa matematicii constă în libertatea ei". Ideile pe care le-a susţinut în cadrul acestui Congres nu au prea fost înţelese atunci : ele anticipau metoda lui de mai tîrziu, pentru a stabili necontradicţia aritmeticii. „Dificultăţile întîlnite la fundamentarea aritmeticii, spunea el, „sînt în parte de altă natură decît acelea ce trebuiau învinse la fundamentarea geometriei. Atunci cînd am examinat bazele geometriei, anumite dificultăţi de natură pur aritmetică au putut fi lăsate deoparte ; la fundamentarea aritmeticii, invocarea altei discipline fundamentale apare de nepermis". Iar mai departe, după o analiză critică a diverselor lucrări privind fundamentarea aritmeticii, pe care le-am discutat şi noi, spune : „Aritmetica este considerată ca o parte a logicii şi de cele mai multe ori la fundamentarea aritmeticii se admit ca premise conceptele fundamentale tradiţionale ale logicii. Numai că, studiind cu atenţie, observăm că în expunerea obişnuită a legilor logicii se întrebuinţează anumite concepte fundamentale ale aritmeticii, de pildă, conceptul de mulţime, în parte chiar conceptul de număr, îndeosebi de număr indicator. Ajungem astfel într-o situaţie fără ieşire şi, de aceea, pentru evitarea paradoxurilor este necesară o dezvoltare parţial concomitentă a legilor logicii şi ale aritmeticii". (14, p. 393)

— Şi care-i soluţia pe care o propune Hilbert ?

— El propune o formalizare a logicii şi a aritmeticii astfel ca propoziţiile lor să se exprime prin aceleaşi elemente comune : *semne lipsite de orice semnificaţie*, şi diferitele

lor combinări, efectuate după axiome privind calculul propoziţiilor respective. Pentru a stabili necontradicţia, Hilbert a propus repartizarea „combinaţia obiectelor de bază în două clase, a existentelor şi a neexistentelor".

— Asta nu mai înţeleg deloc! Ce înseamnă „obiect de bază" şi „existent ori neexistent"?

— Am să citez ce spunea Hilbert: „Se numeşte obiect al gîndirii sau, mai pe scurt, *obiect*, un lucru din gîndirea noastră şi se înseamnă cu un simbol"; *acesta este obiectul de bază*. În clasa obiectelor existente, Hilbert considera axiomele şi toate propoziţiile deduse prin reguli admise, iar în clasa obiectelor neexistente, toate propoziţiile negative sau nedemonstrabile. Prin această separare Hilbert credea că va putea demonstra imposibilitatea ca o propoziţie să se afle în aceeaşi clasă cu negaţia ei.

— Am o carte în care J. Dieudonné ne înfăţişează, într-o formă foarte sugestivă, concepţia hilbertiană. Ascultaţi: „Matematica devine un joc în care piesele sînt semne grafice care se deosebesc între ele prin forma lor. Cu aceste semne se formează asamblaje care, după forma lor, se vor numi *relaţii* sau *termeni*: în virtutea unor anumite reguli anumite relaţii sînt considerate ca adevărate; alte reguli permit să se formeze relaţii adevărate fie pornind de la nişte relaţii oarecare, fie pornind de la alte relaţii adevărate. Punctul esenţial este că aceste reguli sînt aşa stabilite încît pentru a verifica dacă s-a ţinut seama de ele e de-ajuns să cercetăm forma asamblajelor care intră în joc. Este important să observăm că sensul cuvintelor *relaţie* şi *termen* este pur convenţional: se pot compara aceste cuvinte cu termenii din jocul de şah, ca, de exemplu: „şah", „mat", „rocadă", ... care sînt folosiţi ca să caracterizeze, într-un mod prescurtat, anumite situaţii sau anumite mişcări din joc, descrise pe larg prin reguli ... " (24)

— Am auzit de multe ori de această comparaţie a matematicii cu un joc de şah; chiar şi Poincaré o menţionează undeva, combătînd-o, dar nu ştiam că a folosit-o şi acest bine cunoscut matematician francez, J. Dieudonné.

— Aş vrea să mai adaug că Hilbert a propus, tot în cadrul acestei comunicări de la Heidelberg, ceva cu totul nou, anume că *demonstraţia însăşi să devină obiect al cercetării matematice*. De altfel, comunicarea aceasta a fost

considerată ca deosebit de interesantă şi a fost tradusă îndată în limba franceză şi în limba engleză şi publicată în revistele de specialitate. Însuşi Poincaré a spus că în ea se găsesc idei dintre cele mai profunde, dar aceasta nu l-a împiedicat să o foarfece în articolul său „Logicile noi". (5, p. 179)

— Şi Constance Reid a semnalat observaţia matale, Bădie, în cartea ei. Iată ce scrie la pagina 99 : „Poincaré a comentat de multe ori, nefavorabil, această idee" (adică a teoriei demonstraţiei, cum se va numi de aici înainte studiul asupra demonstraţiei) şi continuă cu aluzii la controversele care au existat între aceste două minţi geniale. Dar după comunicarea de la Heidelberg se pare că interesul lui Hilbert pentru fundamentarea aritmeticii a dispărut, căci timp de 18 ani el nu a mai publicat nimic în legătură cu aceasta, cercetările lui Hilbert îndreptîndu-se în alte direcţii. În acest timp, problema fundamentării aritmeticii a continuat să preocupe pe mulţi matematicieni. Ne amintim că Russell şi Whitehead au publicat cele trei volume din *Principia*, apoi Zermelo a stabilit, în 1904, teorema asupra mulţimilor bine ordonate şi, în continuare, a formalizat şi axiomatizat teoria mulţimilor.

— Dar despre ultimul rezultat al lui Zermelo nu ne-ai vorbit nimic !

— Nu, pentru că această problemă depăşeşte cadrul discuţiilor noastre. Pot cel mult să spun că el, împărtăşind părerea profesorului său Hilbert, considera că teoria mulţimilor este independentă de logică şi deci nu era de acord cu încorporarea ei în logică, cum a făcut Russel şi Whitehead. Aşa că pentru a găsi un remediu contra paradoxului lui Cantor sau a lui Burali-Forti, Zermelo, — iar mai tîrziu şi alţi matematicieni — a formalizat şi a axiomatizat teoria mulţimilor.

— Cum adică, i-au dat o bază axiomatică, aşa ca în geometria euclidiană ?

— Exact, după modelul în care a axiomatizat Hilbert geometria, Zermelo a axiomatizat, în 1908, teoria mulţimilor. Înseamnă că obiectele ca : mulţimi, submulţimi etc. nu mai au nici un înţeles intuitiv, ci sînt nişte *simboluri*.

— Am tot vrut să spun, dar mi-ai luat piuitul, că *simbol* vine de la cuvîntul grecesc *simbalein* care înseamnă : a

pune la un loc, a uni două lucruri fără a le confunda. Mi se pare că merge şi acum această explicaţie.

— Cum să nu, de la dumneavoastră ştiu, dragă profesore, că-i mai bine mai tîrziu decît niciodată. Desigur că Zermelo, de asemenea, a trebuit să introducă, întocmai ca Hilbert, anumite axiome. Axioma alegerii intră în cadrul acestei axiomatizări. Problema fundamentelor aritmeticii a dormitat în mintea lui Hilbert şi s-a trezit brusc abia după ce unul dintre elevii lui, Herman Weyl s-a întors la Göttingen, după ce luptase în primul război mondial. Avea pe atunci 33 de ani și aducea cu el idei noi în legătură cu cercetările despre fundamentele matematice, idei care îl încîntaseră și care aparţineau matematicianului olandez L. E. J. Brouwer. Brouwer era cunoscut în lumea matematicienilor prin contribuțiile sale din domeniul topologiei, dar cînd și-a exprimat ideile personale asupra fundamentelor matematicii, matematicienii care se ocupau cu această problemă le-au găsit de-a dreptul de neconceput. Weyl însă nu era dintre aceștia, el a fost entuziasmat de ideile lui Brouwer, care, spunea el „ne-a deschis ochii" şi ne-a făcut să vedem că activitatea matematică își are originea în intuiție, ea fiind aceea care dă *claritatea conceptelor şi deducerilor sale.* Aceste idei, la care se adăugau acelea că matematica este independentă de logică, de principiul terțiului exclus — care nu se aplică decît la mulțimile finite — sau că alături de *A* şi non-*A* poate exista o a treia posibilitate, probleme pe care Weyl le discuta cu încîntare, l-au scos din sărite pe Hilbert, și astfel a reluat cercetările sale asupra fundamentelor aritmeticii și în particular asupra necontradicției. Dar, totodată, a ținut să se informeze precis asupra teoriei pe care o susținea Brouwer. De aceea l-a invitat la Göttingen ca să-și expună ideile. Comunicarea lui a fost urmată de discuții însuflețite, unii fiind pentru, iar alții contra. Cu această ocazie Hilbert i-a spus lui Brouwer : „Cu metoda dumneavoastră multe dintre rezultatele obținute în matematica modernă ar trebui părăsite, ori pentru mine, lucrul important nu este să avem mai puține rezultate, ci cît mai multe". La aceste observaţii s-a asociat şi Hans Lewy, pe atunci docent la Göttingen, care a spus : „Se pare că există unii matematicieni cărora le lipsește simțul umorului sau au un surplus de conștiință. Ceea ce a afirmat Hilbert

mi se pare foarte drept. Dacă am avea de învins atîtea încercări cîte le-a arătat Brouwer, atunci nimeni nu ar mai dori să fie matematician. În definitiv, este o activitate omenească și pînă ce Brouwer va putea dovedi o contrazicere în matematica noastră clasică, nimeni nu-i obligat să-l asculte. Iată, după părerea mea, calea pe care s-a dezvoltat logica : s-a acceptat un principiu pînă cînd cineva a observat că duce la o contradicție și atunci el a fost modificat. Cred că acesta este drumul și va fi întotdeauna. Pot exista multe contradicții și îndată ce vor apărea, toți matematicienii vor dori să le elimine. Dar pînă atunci, noi vom continua să acceptăm acele principii care permit un progres mai rapid". După această întîlnire, Hilbert s-a concentrat mai adînc asupra fundamentelor aritmeticii, alarmat de adeziunile mereu crescînde ale tineretului pentru ideile lui Brouwer, idei pe care Hilbert le considera, pur și simplu, periculoase. (22, p. 154) La Consfătuirea matematicienilor din 1922, care a avut loc la Hamburg, Hilbert a luat fățiș atitudine contra lui Weyl și Brouwer : „Recunosc că faptele care au dus la formularea antinomiilor din teoria mulțimilor sînt intolerabile, dar renumiții și merituoșii matematicieni Weyl și Brouwer caută soluția problemei pe căi false... Ei încearcă să salveze matematica aruncînd peste bord tot ce li se pare anevoios... ei vor să sfărîme și să denatureze știința... Dacă am vrea să urmăm această reformă pe care ne-o sugerează, am risca să pierdem o bună parte din cel mai valoros tezaur al nostru".

— Aș fi vrut să asist și eu la această consfătuire. Mi-închipui pe Hilbert, cu cîtă pasiune a pronunțat el aceste cuvinte. Matematica nu-și putea găsi un mai strașnic apărător.

— În adevăr, cîtă vreme scandalul antinomiilor nu luase o formă agresivă, Hilbert și-a căutat liniștit de celelalte probleme care-l preocupau. Dar acum, prin tezele lui Brouwer el vedea amenințată însăși existența matematicii și s-a hotărît să intervină cu autoritate și chiar cu violență, încredințat că astfel va sugruma conflictul „odată pentru totdeauna" !

— Un geniu ca el putea să fie atît de naiv și să creadă că așa ceva ar fi fost cu putință ? „Odată pentru totdeauna" ?

Aşa de tare credea el în *teoria demonstraţiei*, care începuse să i se înfăţişeze tot mai ademenitor ?

— Tocmai mata te întrebi, Bădie ? Mata, care..., dar mai bine să tac şi să-l citez pe Weyl. Să vedem ce credea el despre această atitudine a lui Hilbert. Ne-o spune în articolul de care am amintit, la pagina 268 :

„Hilbert nu voia să facă greul sacrificiu pe care-l cerea punctul de vedere al lui Brouwer şi a văzut, cel puţin a proiectat, o cale pe care putea evita dura mutilaţie. El era convins că se poate reveni la o completă siguranţă „fără a comite vreo trădare faţă de ştiinţa noastră" : „Să interzici unui matematician să folosească principiul terţiului exclus", spunea el, „este ca şi cum ai interzice unui astronom luneta sau unui boxeur să-şi folosească pumnii".

— Hilbert vorbeşte de *tezaurul nostru* ; îl arată ?

— Cum să nu ? „Noţiunea generală de număr iraţional, aceea de funcţie, teoria funcţiilor numerice, numerele transfinite ale lui Cantor, teorema care spune că printre numerele întregi infinite există unul care este cel mai mic, principiul logic al terţiului exclus ş.a.m.d.

— Dar, efectiv, cum l-a apărat ?

— Cu aceasta ne vom ocupa de aici înainte. În articolul „Despre infinit", pe care l-a publicat în 1925, el a dezvoltat ideile sale despre formalizarea aritmeticii şi teoria demonstraţiei sau *metamatematică*, fiind convins că această metodă este calea prin care se poate ieşi din impasul creat de antinomii şi prin care se poate restructura matematica.

— Amîndouă ideile le găsesc cu totul originale şi dacă despre formalizare am discutat, despre metamatematică nu am făcut-o niciodată. Dacă traduc bine, metamatematică trebuie să însemne „alături de matematică". Cum vine asta ?

— Înţelesul vi se va dezvălui treptat. Acum am să vă spun doar că o formalizare completă a matematicii în limbajul logicii simbolice impune ca formulele prin care se exprimă teoremele şi demonstraţiile lor să devină ele însele obiect de studiu. Numai aşa, considerînd expresiile formalizate, abstracţie făcînd de semnificarea lor, se poate stabili necontradicţia, însă această analiză nu mai aparţine matematicii, ci *metamatematicii*. Beth observă că Hilbert a anticipat rezultatul cercetării metamatematice prin următoarele cuvinte : „Matematica este liberă de orice presupunere.

Ca să o întemeiez nu am nevoie nici de Dumnezeu, aşa cum pretinde Kronecker, nici de ipoteza unei predispoziţii speciale a înţelegerii noastre care să se armonizeze cu principiul inducţiei complete, cum crede Poincaré, nici de o intuiţie originală ca Brouwer, nici, în fine, de axiomele infinitului, a reductibilităţii şi a saturaţiei, ca Russell şi Whitehead, care sînt presupuneri reale şi materiale ce nu s-ar putea compensa printr-o demonstraţie a necontradicţiei".

— Am lîngă mine cartea lui Lautman şi este un pasaj aici, care cred că merită să-l cităm, mai înainte de a ne spune tu, ce ai de spus, mai departe.

— Îl ştiu, Bădie, şi ai avut o idee grozavă să ni-l citeşti. Te ascultăm !

— „Punctul de vedere structural... este acela al metamatematicii lui Hilbert. Se cunoaşte deosebirea care separă concepţia hilbertiană a matematicii de aceea din *Principia Mathematica* a lui Russell şi Whitehead. Hilbert înlocuieşte, prin definiţii axiomatice, metoda definiţiilor genetice şi, în loc să reconstruiască matematica, pornind de la logică, introduce, din contra, trecînd de la logică la aritmetică şi de la aritmetică la analiză, noi variabile şi noi axiome care lărgesc de fiecare dată domeniul consecinţelor. Iată, de exemplu, după Bernays, care a publicat în ediţia operelor complete a lui Hilbert un studiu asupra lucrărilor lui Hilbert despre fundamentele matematicii, tot ce crede el că-i necesar să se dea, ca să se formalizeze aritmetica ; calculul propoziţiilor, axiomele de egalitate, axiomele aritmeticii ale funcţiei „următorului" $(a+1)$, ecuaţiile de recurenţă pentru adunare şi înmulţire şi, în fine, o anumită formă a axiomei alegerii... Matematica se prezintă astfel sub forma unor sinteze succesive în care fiecare etapă nu se poate reduce la etapa anterioară. Mai mult, şi aceasta este esenţial, o teorie astfel formalizată nu poate aduce cu ea dovada coerenţei interne ; trebuie să i se suprapună o metamatematică al cărei obiect de studiu este matematica formalizată, şi ea o studiază din două puncte de vedere : al necontradicţiei şi al completitudinii. Dualitatea planelor pe care Hilbert o stabileşte între matematica formalizată şi studiul metamatematic al acestui formalism are drept consecinţă că noţiunile de necontradicţie şi de completitudine determină un formalism în interiorul căruia ele nu figurează ca noţiuni

definite în acest formalism. Pentru a exprima rolul dominator al noțiunilor metamatematice în raport cu matematica formalizată, Hilbert a scris: „Axiomele și propozițiile demonstrabile, adică formulele care se nasc din jocul acțiunilor reciproce (adică a deducerii formale și adăugarea de axiome noi) sînt imaginile gîndurilor care constituie procedeele obișnuite ale matematicii dezvoltate pînă aici, dar nu sînt adevăruri în sensul absolut. Adevărurile în sens absolut sînt mai degrabă punctele de vedere pe care le dau teoria mea, a demonstrației, în ceea ce privește rezolubilitatea și necontradicția sistemelor formale". Teoria matematică capătă astfel valoarea ei din proprietățile metamatematice pe care structura sa o întruchipează". (20, p. 26)

— Ce vrea să înțeleagă Hilbert prin rezolubilitate?

— Asta e iarăși o problemă cam cu ghimpi! În 1900, cu ocazia vestitului Congres internațional al matematicienilor de la Paris, Hilbert a prezentat 10 dintre 23 de probleme care-și așteptau rezolvarea căci, după cum a afirmat el atunci, era *convins* că *toate problemele matematice se pot rezolva*. Această convingere a lui, enunțată ca un principiu și cunoscut apoi sub numele de *principiul rezolubilității*, s-a dovedit că nu-i întemeiată. Astfel că principiul rezolubilității s-a transformat mai tîrziu într-o problemă fundamentală a matematicii, care se ocupă cu stabilirea cazurilor în care o problemă *poate sau nu poate fi rezolvată* și de aceea ea se numește încă și *problema deciziei*. În citatul de mai sus Hilbert accentuează faptul că teoria demonstrației este în stare să stabilească rezolubilitatea sau nerezolubilitatea unei probleme. Interesant îmi pare și un alt citat, pe care-l redă C. Reid, al lui A. Tarski (22, p. 218), despre metamatematica lui Hilbert: „Viitorul istoric al științelor legate de dezvoltarea matematicii de la sfîrșitul secolului al XIX-lea și prima jumătate a secolului al XX-lea, va constata că în multe dintre ramurile matematicii Hilbert a avut o importantă și viguroasă contribuție... Un exemplu remarcabil este metamatematica..., primul și cu adevărat profund rezultat a apărut mai înainte ca Hilbert să înceapă opera sa în acest domeniu... Cu toate acestea, pe bună dreptate, Hilbert a fost numit tatăl metamatematicii. Căci el este singurul care a creat metamatematica, privită ca o ființă independentă, el a luptat pentru dreptul ei la existență,

sprijinind-o cu autoritatea lui de mare matematician. Şi el a fost singurul care... i-a încredinţat sarcini ambiţioase şi importante. E adevărat că aşteptările tatălui nu au fost realizate de copil ; nu i-a fost dat să fie un copil minune. Dar s-a dezvoltat sănătos şi cuminte, a devenit un membru normal al marei familii matematice şi nu cred că tatăl ar avea vreun motiv ca să-i fie ruşine de acest descendent".

— Mi se pare că te-ai cam grăbit cu acest citat din Tarski. Cred că doctorul nostru nu a putut sesiza aluziile relativ la „aşteptările tatălui".

— Acestea le bănuiesc şi, oricum, le voi înţelege, cred, ulterior. Eu aş vrea însă ceva mai mult : un exemplu concret, care să-mi pună în faţă cele două etape ale raţionamentului: formalizat şi lipsit de orice interpretare intuitivă şi apoi analiza metamatematică a formulei, ca să se stabilească necontradicţia acelei formule.

— Bine, să aşezăm deci faţă în faţă cele două moduri de exprimare :

Matematic :	*Metamatematic* :
$4+7=11$	$4+7=11$ reprezintă o formulă aritmetică în care apare semnul egal. Ca să fie adevărată trebuie ca de o parte şi de alta a acestui semn să se afle expresii echivalente.
$x=x$ $1=1$ $1=3$	Formula $1=1$ s-a obţinut din formula generală $x=x$ prin înlocuirea variabilei x cu constanta 1, şi deci o adevărată. $1=3$ nu este adevărată, căci semnul egal nu permite ca variabila x să ia odată valoarea 1 şi a doua oară valoarea 3.

Cazurile pe care le-am arătat eu sînt cu totul naive, dar le consider suficiente pentru ca discuţia noastră să poată continua. În *Fundamentele matematicii*, lucrare ce a fost publicată în 1928, Hilbert a insistat asupra formalizării logicii şi a aritmeticii precum şi asupra noului studiu : metamatematica sau teoria demonstraţiei. El a arătat că obiectele acestui studiu sînt *toate asamblajele formate din*

semne, care reprezintă anumite formule precum și organizarea lor în teoreme, adică „sînt imaginile gîndurilor care constituie procedeele obișnuite ale matematicii dezvoltate pînă acum, dar nu sînt adevăruri în sens absolut". *Adevărurile în sens absolut* sînt stabilite din punctele de vedere ce rezultă din teoria demonstrației în ceea ce privește rezolubilitatea, completitudinea și necontradicția matematicii formalizate. Pentru ca să fie posibilă construirea acestor asamblaje, Hilbert a stabilit *un număr finit* de simboluri, acest *caracter finitist* fiind considerat a fi o *condiție esențială* ca să se asigure *evidența* legilor de construcție.

Tot în acest articol, Hilbert strecoară și unele ironii. De pildă la adresa lui Brouwer: „Jocul cu formulele, pe care Brouwer îl tratează cu dispreț, are în afară de valoare matematică și o importantă semnificare filosofică. Fiindcă acest joc cu formulele se realizează după anumite reguli determinate prin care se exprimă *tehnica gîndirii noastre*. Aceste reguli formează un sistem închis, care poate fi descoperit și indicat în chip definitiv. Ideea fundamentală a teoriei mele despre demonstrație nu este altceva decît să descriu activitatea intelectului nostru, să stabilesc un protocol asupra regulilor conform cărora procedează de fapt gîndirea noastră. Gîndirea se desfășoară paralel cu vorbirea și scrierea, prin formarea și juxtapunere de propozițiuni... și cunoscînd aceasta se impune ca o sarcină a științei, să ne elibereze de tot ce-i arbitrar, să ne apere de subiectivismul care s-a manifestat odinioară în părerile lui Kronecker și, după cum îmi pare mie, și-a găsit punctul culminant în *Intuiționism*". (22, p. 186)

— Deși Hilbert se exprimă atît de convingător, cred că nici Brouwer, nici alți intuiționiști nu s-au lăsat convinși de programul propus de Hilbert.

— Desigur că nu. Unii matematicieni l-au acuzat că prin formalismul lui el a redus matematica la un „joc fără sens", alții că formalizarea completă duce la sterilitate. Și iată ce a răspuns G. H. Hardy la prima acuzație: „Este imposibil să presupunem că Hilbert tăgăduiește semnificarea și realitatea conceptelor matematice și am cel mai puternic argument ca să nu cred aceasta: axiomele și teoremele demonstrabile, o spune el însuși, care rezultă din jocul nostru formalizat, sînt imaginile ideilor care formează subiectul matematicii obișnuite". (22, p. 184)

Cealaltă obiecţiune o analizează Feys: „Formalizarea a decepţionat şi trebuia să decepţioneze ambiţiile gratuite ale acelora care aşteptau o metodă universală, uşoară, mecanică, ca să verifice toate rezultatele obţinute şi să obţină altele. Formalizarea este un instrument de rigurozitate şi nu un instrument de ajutorare sau de uniformizare; e natural că marea majoritate a teoremelor matematice să fi fost stabilite prin metode adaptate mai mult invenţiei şi mai puţin adaptate criticii riguroase. Domeniul propriu al metodelor formalizate este acela al cercetării proprietăţilor deductive: consistenţa, suficienţa, independenţa. În acest domeniu, metodele formaliste au deschis mai degrabă perspective noi sau au descoperit limitele nebănuite ale raţionamentului decît să aducă problemelor o soluţie simplistă şi definitivă. Cercetările asupra independenţei axiomelor au permis construcţia logicilor neclasice. Consistenţa sistemelor matematice a fost raportată la consistenţa sistemelor mai evidente... În domeniul problemei deciziei (la care se reduce aceea de a putea verifica *mecanic* valoarea unei aserţiuni) au fost revelate limitările teoremei lui Gödel şi s-a ajuns, cînd la cunoaşterea metodelor de decizie, cînd la cunoaşterea cazurilor în care problema este insolubilă. Pe cale de corolar a apărut imposibilitatea de a sistematiza întreaga ştiinţă într-un sistem unic satisfăcător". (25)

— Dacă vrei, te rog să mai citeşti o dată chestia cu *decizia*. Este acolo ceva ce merită discutat.

— „În domeniul problemei deciziei (la care se reduce aceea de a putea verifica mecanic valoarea unei aserţiuni)...

— Mulţumesc, atîta am vrut să mai aud odată, fiindcă nu întîmplător Feys vorbeşte de *verificarea mecanică*.

— Bineînţeles, dragă Toa, şi eu aveam de gînd să ridic această problemă. Dar fiindcă ai început-o tu, eu am să continui, introducînd mai întîi această frază din cartea lui Bourbaki (p. 621): „Problema deciziei este fără îndoială cea mai ambiţioasă dintre toate pe care şi le pune metamatematica: e vorba să ştii dacă, pentru un limbaj formalizat dat, se poate imagina un *procedeu universal* cvasimecanic astfel că, aplicat la o relaţie oarecare a formalismului considerat, să arate, printr-un număr finit de operaţiuni, dacă această relaţie este adevărată sau nu". Ar rezulta de aici că formalizarea ar reduce gîndirea logică sau matematică la

operații pur mecanice, cu alte cuvinte la construirea unei *mașini de gîndit*, ca mașina Turing.

— Turing ? Tînărul matematician englez care a descifrat, în timpul celui de-al doilea război mondial cele mai importante coduri secrete ale armatei germane ?



Alan Mathison Turing

— Da. Fusese un copil minune și un strălucit student al Universității din Cambridge și, încă din 1936, pe cînd avea 24 de ani, a publicat o lucrare deosebit de importantă care este considerată și azi ca de bază în teoria calculatoarelor electronice. În ea, el făcea o analiză logică a noțiunii de a calcula și de aici se ajungea la concluzia că prin formalizarea matematicii se puteau construi mașini universale care ar putea fi programate ca să rezolve anumite probleme. Prin această lucrare el este un precursor al calculatoarelor electronice, al mașinilor de gîndit.

— Atunci era natural ca el să fi putut descoperi secretele militare ale germanilor, care erau codificate cu o mașină specială „Enigma". privită de ei ca absolut invulnerabilă !

— Și de aceea germanii credeau că descoperirea secretelor lor nu poate avea altă cauză decît trădare și spionaj. Adevărul a fost arătat mai tîrziu, cînd războiul fusese de mult terminat.

— Construirea *mașinilor de gîndit* i-a făcut pe mulți să-și pună întrebarea dacă ea n-ar fi în stare să înlocuiască pe matematicieni și pe logicieni ? Mai mult, soluția unei probleme, putînd fi dată în mod mecanic, originalitatea de gîndire pe care o pretinde matematicianul, sau logicianul, devine de prisos !

— Problema e mai complicată și cere o analiză a raportului dintre formalizare și construirea unei mașini de gîndit. Ca să se construiască un calculator capabil să înlocuiască pe matematician în rezolvarea unei probleme, sau a unei anumite clase de probleme, este necesară mai întîi posibilitatea unei formalizări complete a capitolului respectiv din matematică, ca astfel problema considerată să fie transmisă mașinii printr-un anumit cod. Dacă matematicianul a fost în stare să rezolve această formalizare și să o justifice, atunci problema poate fi rezolvată și de mașină, iar cu ajutorul codului se poate găsi soluția problemei. Însă prin această programare, matematicianului nu i se limitează aptitudinea de a rezolva problema considerată și, dacă mașina *nu va putea afla soluția,* înseamnă că nici matematicianul nu ar fi putut-o afla. Așa că, ar fi greșit să se creadă că prin soluția dată de mașină nu mai este necesară inteligența matematicianului, căci *el* este acela care a construit-o, i-a stabilit codul, a enumerat operațiile care trebuie să se succeadă într-o anumită ordine și a rezolvat *problema deciziei* pentru această clasă de probleme. De altfel, prin analiza din punct de vedere logic a problemelor ce le ridică procesul de calculare, Turing și apoi alți matematicieni au aprofundat și studiul problemelor nerezolvabile, considerat din 1920 de David Hilbert ca fiind de o importanță fundamentală în dezvoltarea logicii matematice, studiu cunoscut, cum am mai spus, sub numele de *problema deciziei.*

— În citatul din urmă, tot în legătură cu problema deciziei, era vorba și de „limitările teoremei lui Gödel". Cred că prin aceasta atingem punctul culminant al discuției noastre de azi.

— Da, stimate profesore, este o problemă care m-a emoționat adînc și nu mă lasă rece nici acum, deși a trecut de atunci o jumătate de veac.

— Ai dreptate, căci articolul lui Gödel „Despre propozițiile formal nedecidabile din *Principia Mathematica* și din sistemele înrudite" *a apărut în 1931*. Eram tineri licențiați și continuam să urmărim revistele de matematici care veneau regulat la biblioteca Seminarului Matematic. Parcă a fost ieri și nu acum aproape 50 de ani atunci cînd ai venit la mine, ți-aduci aminte, dragă Toa ? Tu ai descoperit articolul lui Gödel și n-ai intrat bine pe ușă cînd mi-ai spus : — Știi bomba ? — Bombă ? — m-am gîndit eu, cine știe ce s-a întîmplat prin oraș și eu stau închis în casă și citesc romane ! M-am ridicat brusc în picioare, gata să te însoțesc, dar tu ai rîs și mi-ai făcut semn să mă așez. Am stat amîndoi, unul în fața altuia și tu mi-ai spus cu o voce tremurîndă : — Știi, un matematician, pe nume Kurt Gödel, a arătat acum cîteva luni că necontradicția aritmeticii, așa cum a încercat să o stabilească Russell sau chiar Hilbert, nu se poate dovedi prin metodele finite considerate de amîndoi !



Kurt Gödel

— Cum ? — m-am mirat eu și parcă dintr-odată am fost cuprins de o mare durere. Cum ? Tot ce a crezut Hilbert cu atîta ardoare a fost distrus de Gödel, dintr-odată ? Nu se poate !

— Ba da, iată că se poate ! Gödel arată foarte clar, în acest articol că este imposibil să se stabilească necontra-

dicția aritmeticii *dacă bazezi formalizarea pe metode finite* și dacă nu se folosesc metode de raționament mai tari decît acelea acceptate în metamatematică ! Mai mult chiar, el arată că orice sistem axiomatizat este sau incomplet, sau nedecidabil și știi cum arăta asta ? A construit el singur o propoziție formală care aparține aritmeticii și totuși nici această propoziție și nici negația ei nu face parte din sistemul formal considerat.

— Așadar, a apărut din nou fantoma cretanului ?

— Da, Gödel însuși recunoaște, în introducerea articolului său, analogia dintre raționamentul său și paradoxul mincinosului și chiar cu acela a lui Richard, căci, spune el, a reușit să stabilească o propoziție care afirmă propria sa nedemonstrabilitate ! Demonstrînd că există propoziții aritmetice adevărate care nu aparțin grupului de axiome considerat, metamatematica lui Hilbert, care a fost construită ca să fie un instrument infailibil cînd ai de stabilit necontradicția aritmeticii, s-a dovedit, în absolutismul ei, la fel de slabă ca și logicismul lui Russell !

— Țin foarte bine minte cum am pornit amîndoi înspre Copou și ne-am plimbat ceasuri întregi, încercînd să trăim starea sufletească a lui Hilbert, care ne era drag amîndurora pentru dîrzenia cu care aflasem noi, că afirmase cîndva, că „în matematici nu putem fi *ignorabimus*, fiindcă însăși natura matematicilor este să pună și să rezolve problemele". Dar asta a fost acum 50 de ani, să lăsăm trecutul și să revenim la prezent. Spune-ne tu, Nucule, ce scrie Constance Reid despre această întîmplare.

— Atunci să citim de la pagina 198 : „Cînd Hilbert a aflat vestea de la Bernays — asistentul și colaboratorul lui— „la început a fost cam supărat"...

— Nici nu se putea altfel. Dar după aceea ?

— Ei, aici e toată frumusețea ? A înțeles și nu s-a lăsat copleșit, cum a făcut Frege cînd a aflat de antinomia lui Russell. El nu a plecat capul și nici nu a pus condeiul deoparte. Iată ce scrie Reid : „În mult ingenioasa operă a lui Gödel, Hilbert a văzut că ținta către care s-au îndreptat cele mai multe dintre eforturile făcute de el de la începutul secolului — răspunsul final pe care ar fi vrut să-l dea lui Kronecker și Brouwer și altora care au vrut să restrîngă metodele matematicii — nu s-a putut realiza. Matematica

trebuie să fie consistentă și, de fapt, probabil că este, dar consistența ei nu se va putea stabili niciodată prin teoria demonstrației, așa cum a sperat și a crezut el. Dar încrederea nelimitată în puterea gîndirii umane, care l-a condus în mod ferm spre ultima lui mare operă din cariera sa, l-a făcut să nu accepte emoționat rezultatul lui Gödel. A considerat că descoperirea lui Gödel era o verificare a ceea ce el refuzase să recunoască pînă atunci, anume că formalismul nu avea un cadru suficient de puternic pentru greutatea pe care dorea el să o susțină. La început a fost supărat și dezamăgit, apoi a început să atace problema în mod constructiv. Pe Bernays l-a impresionat faptul că și acum, la sfîrșitul carierei sale, Hilbert era în stare să facă mari schimbări în programul său".

— Dar cîți ani avea pe atunci Hilbert ?

— Nu-i greu de stabilit. Dacă cercetăm indexul din cartea lui Becker putem face socoteala : în 1931, Hilbert avea 69 de ani, Bernays 43, iar Gödel 25 de ani !

— Foarte interesant ! La 70 de ani să păstrezi entuziasmul din tinerețe chiar dacă un tînăr de 25 de ani te-a înfruntat cu vigoare !

— Am citit că Gödel nu a stat niciodată de vorbă cu Hilbert și nici nu a fost în corespondență cu el. Dar, au mai rămas cîteva rînduri interesante pe care aș vrea să le citesc. Iată cum continuă C. Reid observațiile sale : „Nu era prea clar ce influență va avea pînă la urmă lucrarea lui Gödel. Gödel însuși recunoștea, și a exprimat aceasta în articolul său, că lucrarea lui nu contrazicea punctul de vedere formalist al lui Hilbert, și curînd s-a dovedit că teoria demonstrației poate fi dezvoltată cu succes fără a păstra programul original. Hilbert însuși a făcut un pas în această direcție. Anume, a înlocuit schema sa de inducție completă printr-o regulă mai tare, numită „inducția transfinită". Aceasta o scrie la pagina 199. Mai departe, în pagina 217, avem continuarea : „În ciuda loviturii pe care programul lui Hilbert l-a primit (formalizarea matematicii și stabilirea consistenței printr-o demonstrație absolută) prin lucrarea lui Gödel, concepția care eliberează matematica de orice contradicție a triumfat fără îndoială. „În ciuda rezultatelor mele negative", scria Gödel, „schema lui Hilbert legată de fundamentele matematicii rămîne foarte interesantă și importantă". Și tot el a

adăugat: „Ceea ce s-a dovedit este că obiectivul *specific epistemologic* pe care-l avea Hilbert în vedere nu poate fi atins. Acest obiectiv era să se dovedească consistența axiomelor matematice pe baza evidenței concrete și imediat convingătoare a aritmeticii. Cu toate acestea, privind situația din punct de vedere pur matematic, dovada consistenței bazată pe ipoteze metamatematice convenabile, mai puternice (așa cum au fost date de Genzel și alții), sînt foarte interesante și conduc la concluzii foarte importante legate de demonstrarea teoretică a structurii matematice".

— În *Discuțiile de la Zürich, din 1938,* despre care am mai vorbit noi, se află și o comunicare a lui P. Bernays, intitulată „Asupra problemelor metodologice actuale ale teoriei hilbertiene a demonstrației". Sînt aici cîteva lucruri foarte interesante, dar cred că am să le arăt abia atunci cînd vom discuta despre *Intuiționism,* fiindcă referințele cu privire la acest capitol ar fi acum neacoperite.

— Bine, Bădie, numai te rog să-ți notezi, fiindcă problema formalismului merită discutată pe îndelete, adică să mai revenim la ea. De altfel, eu intenționez să mă întorc și acum, după ce ne-am ținut mai mult de povești decît de problemă, ca să o fixăm cum trebuie.

— Te aprob și eu, și cred că doctorul nostru nu se va împotrivi.

— Din contra, mie de abia după ce voi mai auzi odată anumite lucruri mi se vor lămuri cum trebuie căci, deocamdată, ceea ce am reținut este că Hilbert a fost ademenit de o iluzie pe care tînărul Gödel i-a spulberat-o!

— Nu chiar de tot!

— Să zicem că nu chiar de tot! Dar mai bine să vedem exact cum stau lucrurile!

— Iată cum începe Kurt Gödel, vestitul său articol din 1931: „Dezvoltarea matematicii în direcția unei precizări mai mari a dus, după cum se știe, la faptul că domenii largi din ea au fost formalizate astfel încît demonstrarea poate fi efectuată după cîteva reguli mecanice.. toate metodele de demonstrație folosite azi în matematică sînt formalizate, adică reduse la cîteva axiome și reguli de deducere. Puteam presupune că aceste axiome și reguli de deducere sînt suficiente pentru ca *toate* problemele care se pot exprima în general formal, să se poată și decide. În cele ce urmează,

se arată că lucrurile nu stau aşa şi că există probleme, chiar relativ simple din teoria numerelor întregi ordinale care nu se pot decide din axiome. Această împrejurare... este adevărată pentru o clasă foarte largă de sisteme formale..." (14, p. 433)

— N-ai vrea să ne explici tu însuţi, mai pe şleau ?

— Ba da, dar am crezut că aşa-i mai elegant ! După cum s-a mai spus, rezultatele pe care le-a stabilit Gödel sînt două. Primul arată că nu există nici o demonstraţie metamatematică din care să rezulte consistenţa întregii aritmetici, bineînţeles formalizată, dacă se folosesc metode de demonstraţie cuprinse în sistemul formalizat, dar că *această consistenţă este posibilă*, dacă intervin alte reguli de demonstraţie, mai largi sau mai tari.

— Stai şi ia-o mai cu încetişorul ! Să admitem că avem un sistem S în care s-a formalizat întreaga aritmetică, adică au fost formalizate toate propoziţiile din S, iar acestea reprezintă teoreme aritmetice şi nici o propoziţie din S nu reprezintă formalizarea unei teoreme false.

— Aşadar, după ce orice propoziţie aritmetică p din S a devenit o propoziţie formală, atunci fie p, fie $\bar{p}$ este o teoremă formală din S.

— Adică înseamnă că teorema p este decidabilă !

— Întocmai. Acum Gödel a construit efectiv o propoziţie g care formalizează o teoremă aritmetică şi a arătat că nici g şi nici $\bar{g}$ nu sînt teoreme formale din S.

— Atunci g nu-i decidabilă ? Cu alte cuvinte, există propoziţii care nu sînt teoreme, deşi nu încape nici o îndoială că sînt teoreme ?

— Exact ; şi acesta fiindcă propoziţia g este despre ea însăşi ! Acum să trecem la a doua concluzie a lui Gödel. El a arătat că posibilităţile metodei axiomatice sînt limitate, că orice sistem în care s-ar încerca o axiomatizare a aritmeticii pe bază finită este prea restrîns ca să fie posibilă demonstrarea necontradicţiei ei. Aşadar, dacă se fixează un sistem de axiome, din care să se dezvolte aritmetica, există propoziţii aritmetice care *nu* derivă din axiomele stabilite. În aritmetică sînt, aşa cum a afirmat Gödel, „probleme chiar relativ simple", care nu pot fi demonstrate ţinînd seamă de axiomele existente ! Un exemplu bine cunoscut este teorema lui Goldbach, care spune că „orice număr

par este suma a două numere prime". Nimeni nu a reușit încă să stabilească o demonstrație a acestei teoreme, propusă de Goldbach lui Euler în 1742.

— În 1742 ? Adică acum aproape 240 de ani ?

— Da. Și desigur că de atunci și pînă acum s-a încercat demonstrarea ei prin diferite metode sau s-a recurs la verificări, dar totul a fost degeaba. Nici marele Euler n-a rezolvat-o, el care de fapt i-a dat problemei acest enunț, fiindcă Goldbach își întrebase prietenul : „cum ar putea demonstra că orice număr impar, mai mare decît 5 este suma a trei numere prime" ? Pusă însă sub varianta lui Euler, problema este mai generală, iar formularea lui Goldbach apare ca o consecință a ei. Chiar și Georg Cantor s-a ocupat cu această problemă și a încercat toate numerele pare de la 2 la 1 000.

— Să luăm și noi un exemplu : 8=3+5 ; 100=1+99. Iată că 99 nu-i prim !

— Dar 100 se poate descompune în 11+89, care sînt numere prime !

— Așa fiind, îmi închipui că nu a fost tocmai ușoară trebușoara lui Cantor !

— Oricum, cred că nu mai grea decît să deschizi cutia craniană sau să zgîndărești măduva, dragă doctore. Și ca să vă conving, vă informez că, după Cantor, Aubry s-a jucat, încercînd toate numerele pare dintre 1 000 și 2 000 și, ca să nu rămînă mai prejos, E. Melet a arătat că majoritatea numerelor pare dintre 4 000 și 9 000 000 sînt sumă de două numere prime !

— Dacă s-a dus pînă la 9 000 000, înseamnă că a folosit un calculator ?

— Asta-i sigur. Cu creionul nu i-ar fi ajuns o viață de om ! Acestea toate sînt doar verificări, însă în secolul nostru s-au încercat și demonstrații, dar, după cum scrie profesorul Ion Creangă de la Universitatea noastră, în cartea lui *Introducere în teoria numerelor* (26) : „Este una dintre cele mai frumoase probleme aditive ale teoriei numerelor... care a rezistat tuturor încercărilor de demonstrație făcute pînă azi". Teorema lui Goldbach este un exemplu, marea teoremă a lui Fermat altul...

— Și, după cîte am înțeles, Gödel consideră că nu-s de vină teoremele, ci insuficiența axiomelor sistemului aritmetic considerat ?



Ion L. Creangă

— Da, dar să nu mă întrebaţi de ce atunci nu se mai adaugă şi alte axiome, căci răspunsul ar fi „oricîte axiome s-ar adăuga"... Cu alte cuvinte, axiomatizarea nu este o metodă universal valabilă, să stabilească „odată pentru totdeauna orice problemă privind bazele matematicii", cum afirmase odată David Hilbert. Dar de aici nu trebuie să trecem nici în cealaltă extremă şi să subevaluăm meritele metodei axiomatice stabilite de Hilbert. Aş citi mai întîi ce scrie Weyl, în articolul din cartea lui Reid (22, p. 274) : „Hilbert este campionul axiomaticii. Metoda axiomatică îi părea lui că are o semnificare universală nu numai pentru matematică, ci şi pentru întreaga ştiinţă... Cercetările lui în domeniul fizicii au fost concepute în spirit axiomatic. În conferinţele lui i-a plăcut să ilustreze metoda prin exemple luate din biologie, economie etc. Interpretarea epistemologică modernă a ştiinţei a fost profund influenţată de el. Uneori, cînd elogia metoda axiomatică, i se părea că ea este destinată să înlocuiască definitiv metoda constructivă sau genetică. Sînt sigur că cel puţin în ultima parte a vieţii, aceasta nu mai era părerea lui... O atitudine imparţială dă dreptate ambelor părţi : nu puţine din cercetările moderne îşi datorează succesul unei fericite întrepătrunderi a procedeelor axiomatice şi genetice".

— Mi se pare foarte interesant că, încă înainte de a apărea teorema lui Gödel, Gonseth ataca metoda axiomatică, respectiv întreaga teorie a demonstrației, în cartea sa publicată în 1926. În capitolul intitulat „Teoria demonstrației a domnului Hilbert", după ce o analizează trage următoarea concluzie: „Domnul Hilbert a atins cu adevărat scopul pe care și l-a propus și discuțiile asupra fundamentelor matematicii și ale logicii sînt ele oare definitiv închise? Nu credem, căci prin faptul că au fost numite metamatematice, dificultățile nu au încetat să existe: ele și-au schimbat numele și poate locul, dar ele nu și-au schimbat natura. Meritul tentativei domnului Hilbert stă, din contra, în precizarea punctelor în care axiomele-formule trebuie să fie reintegrate în semnificarea lor intuitivă".

— Dar mie mi se pare că Gonseth se referă mai mult la teoria demonstrației decît la axiomatică!

— Vă înșelați, stimate doctore, și eu trebuie să-mi asum vina căci asta dovedește că nu am fost destul de clar în cele ce v-am spus pînă acum. Formalizarea nu se poate face decît printr-o perfecționare a metodei axiomatice, căci numai așa se poate atinge un prag superior al abstracției, o eliminare din concepte și definiții a sensului intuitiv și tocmai așa a crezut Hilbert că poate salva matematica, reducînd teoriile ei la operații pur formale, cu ajutorul simbolurilor și a axiomelor corespunzătoare lor.

— Hilbert intenționa să formalizeze întreaga matematică, numită clasică, Gödel a arătat că nici măcar aritmetica nu poate fi complet formalizată și aceasta fiindcă orice axiomatizare este necompletă dacă la baza ei stau considerații de ordin finit. Și, la aceste rezultate s-a mai adăugat o altă observație, de un ordin mai adînc, anume că axiomele descriu o teorie matematică, dar nu pot pătrunde în natura intimă a procesului de creație matematică!

— Totuși Hilbert nu a cedat. El era un visător entuziast, însă credea cu atîta putere în matematică și într-o armonie prestabilită a structurii ei încît, ori de cîte ori un vis i se năruia, spera să găsească o altă cale pe care să meargă mai departe.

— Asta-i cam așa: În 1900, la Congresul Internațional de la Paris a afirmat *că toate problemele pot fi rezolvate.*

Cînd a înţeles că această afirmaţie a fost un vis, a întrezărit îndată că presupunerea lui fusese doar calea care să-l conducă spre *problema fundamentală a deciziei*. Apoi, cînd s-au arătat antinomiile şi Brouwer susţinea „mutilarea matematicii" el a găsit *teoria demonstraţiei*, visînd că prin ea „va putea înlătura în mod definitiv *orice îndoială în perfecta siguranţă a raţionamentului matematic*".

— Cu cîtă tărie a spus el, în 1924, cînd a ţinut discursul omagial pentru Weierstrass, vorbind despre infinit: „Situaţia în care ne aflăm acum cu privire la paradoxuri nu mai este de suportat. În matematică, acest model de certitudine şi adevăr, definiţiile şi raţionamentele, pe care le-a învăţat fiecare, le predă şi le foloseşte, să conducă la absurdităţi? Dacă şi gîndirea matematică este neperfectă, atunci unde mai putem găsi adevărul şi certitudinea?" A pus această întrebare cu îndrăzneală fiindcă avea răspunsul gata pregătit în *Teoria demonstraţiei*: *metamatematica*.

— În 1934 a apărut volumul I din *Fundamentele matematicii*, la care a lucrat, împreună cu Bernays, din 1930. Am văzut reacţia lui Hilbert cînd Bernays i-a arătat, în 1931, articolul lui Gödel. A înţeles că s-a spulberat iarăşi un vis, dar ştia că soarta matematicii nu depindea de visul lui şi a lucrat mai departe. Chiar din prefaţa celui de-al doilea volum al *Fundamentelor*, care a apărut în 1939, Hilbert şi Bernays au recunoscut importanţa rezultatelor stabilite de Gödel şi au arătat că ţinînd seama de ele a fost lărgit cadrul metodelor concrete de raţionament din teoria demonstraţiei, cadru ce fusese legat de delimitarea punctului de vedere finit. Autorii au introdus acum metoda inducţiei transfinite, care nu parcurge numai şirul numerelor naturale, ci „mulţimi mai mari", bine ordonate. Din nou Hilbert a abdicat şi a trebuit să recunoască astfel că necontradictia aritmeticii elementare nu mai poate fi demonstrată prin metode finitiste. Dar încrederea nu a pierdut-o. Probabil că şi acum a răsunat în mintea lui o frază pe care a pronunţat-o, atunci în 1924: „Să ne amintim că sîntem matematicieni şi ca matematicieni am fost adesea în situaţii precare din care ne-am salvat prin metoda ingenioasă a elementelor ideale..." Căci şi de data aceasta matematica a fost învingă-

toare. Cu sacrificii, desigur, fiindcă şi completitudinea formalismului, în sens absolut, la care a visat Hilbert, n-a fost decît un vis. În 1936 însă, tînărul lui asistent, Gerhard Gentzen, înlăturînd multe dintre presupunerile lui Hilbert şi urmînd metoda inducţiei transfinite, a putut demonstra *necontradicţia aritmeticii elementare*.

— Dar, dacă nici Hilbert nu ne-a putut oferi referinţe absolut certe cu privire la fundamentele matematicii, ce ne rămîne de făcut ?

— Să vedem ce ne spun intuiţioniştii ! Dar aceasta, miercurea viitoare !

VII

ALTI CUTEZĂTORI SEMEȚI

— Problema intuiționismului o vom discuta numai noi trei, fiindcă doctorul Ursu m-a anunțat că este reținut la spital de un caz urgent. El mă ruga să înregistrez pe bandă discuția de azi, ca să o poată asculta și el !

— N-are nici un haz ! Alta-i cînd discutăm între noi, așa cum ne taie capul și alta cînd am avea grijă că ni se înregistrează cuvintele ! Eu unul, n-aș putea să mă concentrez asupra subiectului fiindcă, fără să vreau aș trage cu ochiul la minunăția care și-ar învîrti roțile pe masă.

— De ce sînteți contra progresului, dragă profesore ? Pe mine m-ar interesa să aud — ca un străin — discuția dintre noi și totodată mă gîndesc la plăcerea pe care i-am face-o doctorului Ursu dacă ne-ar putea asculta.

— Tu, dacă ai poftă să te asculți, nu te împiedică nimeni să-ți pui magnetofonul pe care, după cîte am auzit, îți place să ți-l meșteruiești, iar doctorului Ursu am să-i dau cartea lui Heyting pe care am adus-o cu mine acum (27). Ea are să-i placă și are să-l intereseze.

— E cu totul altceva decît discuția noastră, dar, dacă dumneavoastră sînteți contra, cred că Bădia va trebui să țină seamă de părerea matale.

— Mai încape vorbă ? Am altă treabă mai bună de făcut, cred că apa de cafea clocotește de mult.

— Dacă vrei și îmi dai voie, m-aș duce să o fac eu. Cînd am sunat, mata căutai parcă niște cărți și nu le-ai mai găsit, că ne-am apucat de vorbă !

— Ai dreptate, pînă aduci tu cafelele, le caut.

— Ce cărți vrei să aduci ?

— Două cărți strașnice ! Una este tot de Heyting, mai bine zis, editată de el, și cuprinde colocviile ținute la Amsterdam despre *Constructivitatea în matematică* (28), iar cealaltă este o carte a lui Errett Bishop care se cheamă *Fundamentarea analizei constructive*. (29)

— Înseamnă că azi vom avea ceva de furcă ! Îmi pare rău că nu vine și doctorul Ursu, care ne era un bun stimulent ! Dar din cartea ce am adus-o eu, se va lămuri destul de bine și apoi dacă nu înțelege ceva, ne poate pune întrebări ! Dar văd că Nucu a și adus cafelele ! Am să-ți fac un compliment, băiete, un compliment pe care așa de puțini știu să-l aprecieze la justa lui valoare ! Tu ai acum vîrsta cea mai frumoasă, vîrsta pe care a avut-o Gödel cînd a scris articolul acela fulminant, vîrsta pe care a avut-o Brouwer cînd a împuns cu coarnele, așa de unul singur, în toată mulțimea celor *mari*, fără să se sinchisească dacă se numea Cantor sau Zermelo, Peano sau Russell, ori Hilbert. A izbit cu putere în toți și în toate ideile lor, nu din joacă, ci în numele *intuiționismului* !

— Numai că, fiind tînăr, la început nu s-a făcut prea mare caz de toată agitația lui. Cei mai mulți dintre matematicieni au privit-o ca pe o zbenguială pe care numai tinerețea și-o poate permite !

— Aici are dreptate, Bădia. Care matematician cu prestanță și cu scaun la cap ar fi dat dreptate unui tinerel care-i strigă-n față, pe nerăsuflate, că matematica este o activitate autonomă a spiritului, că are un caracter sintetic care nu are nevoie să fie motivată nici de logică, nici de formalism, ci, pur și simplu, *prin construcțiile evidente și intuitive* ale obiectelor ei ? Că logica, cu legile ei clasice formulate de Aristotel și acceptate de toți matematicienii de 2 000 de ani încoace, nu are o valoare absolută, fiindcă nu legile ei fac ca o demonstrație să fie concludentă, ci numai *evidența imediată*, care-și are izvorul în intuiție ! Nu-l priveau, oare, ca pe un copil care bate din picioare și din pumni strigînd : „sîc, sîc, sîc, că eu am dreptate !" ?

—Totuși, Nucule, sub amenințarea celor două antinomii, aceea a lui Burali-Forti, provocată de teoria mulțimilor și aceea a lui Russell, privind logicismul a fost și el tulburat ca și toți cei ce se interesau de fundamentele matematicii. Soluția pe care a întrezărit-o i-a părut cea mai indicată

şi tinereţea lui i-a dat curajul să se sumeţească. Citise *Critica raţiunii pure*, acceptase că „judecăţile matematice sînt toate sintetice şi bazate pe intuiţie" şi a tresărit de bucurie cînd a regăsit părerea, susţinută şi de Poincaré care o completa, afirmînd că „raţionamentul matematic are, prin el însuşi, un fel de virtute creatoare şi prin aceasta se deosebeşte de silogism". Nici părerile lui Kronecker nu l-au lăsat indiferent, ci le-a luat ca punct de plecare şi i-au stimulat imaginaţia. Căci Kronecker socotea că *opera omului* poate avea pecetea perfecţiunii, numai dacă „toate rezultatele cercetărilor matematice, oricît de profunde ar fi ele, s-ar putea exprima, în cele din urmă, sub forma simplă a proprietăţilor numerelor întregi". Cumpănind astfel părerile diferiţilor matematicieni şi filosofi, s-a simţit atras mai mult de Kant decît de Leibniz, mai mult de Kronecker şi Poincaré decît de Dedekind şi Cantor, Russell sau Hilbert. De aceea, în 1907, atunci cînd şi-a susţinut la Universitatea din Amsterdam teza lui de doctorat, în care se ocupa de fundamentele matematicii, a atacat cu energie atît teoria mulţimilor, cît şi logistica lui Peano şi Russell sau formalismul şi axiomatizarea lui Hilbert. Pe toate le-a analizat pe rînd, dovedind că sînt *inconsistente* din punct de vedere intuiţionist. Chiar el a inventat denumirea de *intuiţionism* ca să se exprime, prin acest termen că matematica *este identică cu partea exactă din gîndirea noastră care e bazată pe intuiţia primară a şirului numerelor naturale* şi că, din cauza imperfecţiunii limbajului nostru, ea nu poate fi tradusă fără mutilare într-un sistem formal.

— Şi care a fost reacţia comisiei de doctorat, stimate profesore ? A acceptat, poate, să le bată şi cu pumnul în masă ?

— Nu ştiu, că n-am fost de faţă, dar judecînd după dîrzenia cu care a discutat mai tîrziu cu Hilbert, n-ar fi fost imposibil să o fi făcut ! Dar nu cred că s-a ajuns pînă acolo, fiindcă membrii comisiei trebuie să-l fi privit cu îngăduinţă atunci cînd el afirma, cu seriozitate, că matematica a pierdut contactul cu realitatea gîndirii şi că singura cale de a o recîştiga ar fi să devină intuitivă şi constructivă şi, în acest scop, se impune să se renunţe la întreaga teorie a mulţimilor infinite pentru care nu este valabil principiul

terţiului exclus şi să nu se accepte decît mulţimile finite şi cel mult pe acelea numărabile.

— Şi totuşi, părerile lui au prins ! E de ajuns să-l amintim pe Weyl, care i-a amărît sufletul lui Hilbert cu articolele publicate de el, prin care recunoştea valabilitatea intuiţionismului !

— Asta a fost mai tîrziu, Bădie ! Dar la început, mă gîndesc îndată după 1907, nimeni nu s-a speriat de atacurile celor cîţiva intuiţionişti care s-au grupat în jurul lui Brouwer, şi matematicienii nu s-au grăbit să se lepede de concepţiile lor ca să le adopte pe ale intuiţioniştilor ; cel mult unii dintre ei au căutat să-şi precizeze, într-o formă mai clară, propriile lor convingeri. Nu-ţi aduci mata aminte ce a spus Hans Lewy cînd a venit Brouwer la Göttingen şi a expus concepţiile sale ? : — „Pînă ce Brouwer nu va stabili o contrazicere în matematica noastră clasică, nimeni nu-i obligat să-l asculte". De aceea, Brouwer a trebuit să scrie, şi iar să scrie, ca să-şi repete convingerile sale. Iată ce spunea într-un articol, apărut în 1919, sub titlul : „Teoria intuiţionistă a mulţimilor" :

„Începînd din 1907, în mai multe scrieri de teorie a mulţimilor şi de filosofie am apărat următoarele două teze :

1. Că *axioma comprehensiunii* pe baza căreia se pot reuni într-o mulţime toate lucrurile care posedă o anumită însuşire este inacceptabilă pentru fundamentarea teoriei mulţimilor, respectiv este inutilizabilă (chiar şi în forma mai mărginită dată de Zermelo) şi că matematica trebuie să aibă la bază o definiţie constructivă a mulţimilor ;

2. Că axioma formulată de Hilbert în 1900 despre rezolvabilitatea oricărei probleme este echivalentă cu principiul logic al terţiului exclus ; prin urmare, deoarece pentru această axiomă nu există nici o raţiune suficientă, iar logica are la bază matematica şi nu invers, principiul logic al terţiului exclus este un mijloc nepermis în demonstraţia matematică, căreia nu i se poate atribui decît valoare scolastică şi euristică, astfel încît teoremele în a căror demonstraţie nu se poate evita aplicarea sa sînt lipsite de orice conţinut matematic".

Nefiind convins că şi-a exprimat destul de clar părerile, la acestea mai adaugă şi următorul subsol : „După convingerea mea, atît axioma rezolvabilităţii, cît şi principiul terţiului

exclus sînt false și credința în ele a fost generată istoricește prin faptul că mai întîi în matematica submulțimilor unei *mulțimi finite determinate* s-a abstras logica clasică, apoi acestei logici i s-a atribuit o existență apriori independentă de matematică și, în sfîrșit, această logică, pe baza pretinsei apriorități, în mod nejust a fost aplicată la matematica *mulțimilor infinite*". (14, p. 361)

— Și, după cum știm, Brouwer a avut dreptate, iar Hilbert a trebuit să prefacă axioma rezolvabilității în problema deciziei !

— Eu aș vrea să observ că între formalism și intuiționism există o punte de legătură, dar nici unul, nici altul nu au vrut să o treacă. Doar atît Hilbert cît și Brouwer erau de partea lui Kant și nu acceptau că propozițiile matematice ar fi *analitice*, așadar, demonstrabile numai pe cale logică ; totuși, altfel vedea Hilbert caracterul sintetic al propozițiilor, și altfel Brouwer. Am citit, nu mai știu unde, că Brouwer ar fi spus : „pentru formalist adevărul matematic este pe hîrtie, iar pentru intuiționist, în mintea matematicianului".

— O observație cît se poate de întemeiată căci dacă Brouwer consideră propozițiile aritmeticii și ale geometriei ca *sintetice apriori*, pentru Hilbert, caracterul lor sintetic este pus în evidență prin metamatematică. Discuțiile dintre Brouwer și Hilbert rămîn prezente prin articolele ce apar, de o parte și de alta. La *Fundamentele matematicii*, pe care am văzut că le-a publicat Hilbert în 1828, în care am găsit și o săgeată îndreptată înspre Brouwer, i se opune articolul lui Brouwer din același an, intitulat „Considerații intuiționiste asupra formalismului", în care nici Brouwer nu se lasă mai prejos și îndreaptă nu una, ci patru săgeți către Hilbert : „Deosebirile relative la validitatea dintre noua fundamentare formalistă și noua construcție intuiționistă a matematicii vor fi înlăturate și alegerea dintre cele două activități se va reduce la o chestiune de gust îndată ce următoarele idei, referitoare în primul rînd la formalism, dar formulate mai întîi în literatura intuiționistă, vor reuși să se impună în general. Acest lucru este numai o chestiune de timp, pentru că este vorba de pure rezultate ale reflecției, care nu conțin nici un element discutabil și pe care orice om care le-a înțeles odată trebuie să le ia

11 — Licuricii din adîncuri 212

ca un *credo*. Dintre cele patru idei, pînă acum numai două și-au atras în literatura formalistă înțelegerea și recunoașterea. Cînd și celelalte două vor fi în aceeași situație, acesta va însemna sfîrșitul polemicii fundamentelor în matematică". (14, p. 365)

— N-am ce spune, foarte dîrz ! Parcă încep să-i dau dreptate biografei lui Hilbert, care scria : „În contrast cu Weyl, Brouwer a devenit, ca și Kronecker un fanatic în serviciul cauzei sale. El îl privea pe Hilbert „ca inamicul lui". Cînd am citit acele rînduri, credeam că-s exagerate ; acum văd că nu-s !

— Mă bucură, Bădie, că-mi dai dreptate ! Mai bine mai tîrziu decît niciodată. Așa că, nefiind de glumit cu domnul Brouwer, propun să ne apropiem cu precauție și cu multă atenție de intuiționism.

— De acord. Și cred că cel mai expeditiv mijloc ar fi să începem cu cartea lui Heyting, *Introducere în Intuiționism*, pe care am adus-o, întrucît mi-a plăcut foarte mult.

— Ideea nu-i rea, ba chiar foarte bună, fiindcă această carte a avut mult succes.

— Cred și eu, altfel crezi că aș fi comandat-o ? Heyting a fost elevul lui Brouwer, apoi a devenit colegul lui la Universitatea din Amsterdam, colaboratorul și, aș spune, popularizatorul operei lui Brouwer, deși cuvîntul nu-i tocmai potrivit, fiindcă aici nu-i vorba de popularizare, ci de o prezentare, într-o formă desăvîrșită și mai ușor de înțeles decît din lucrările lui Brouwer a intuiționismului. Arend Heyting și-a susținut, în 1925, teza de doctorat, tot la Universitatea din Amsterdam, ca și Brouwer, avînd ca subiect „Despre axiomatizarea matematicii intuiționiste". Am răsfoit de mai multe ori cartea aceasta, apărută în 1956 și mi-a plăcut faptul că problema intuiționismului este prezentată sub forma unor discuții, între mai multe persoane.

— Procedeul dialogului a fost folosit de multe ori, de pildă de Platon sau, în timpurile mai apropiate de noi, de Galileu.

— Personajele lui Heyting au însă o identitate aparte. Autorul spune : „ele sînt cîrlige de atîrnat idei" și de aceea se și numesc : *Class, Form, Int, Prag*...

— Adică o prescurtare a numirilor : *clasicism, formalism, intuiționism, pragmatism* etc. ?

— Desigur, în felul acesta fiecare personaj își expune propria sa teorie ! Și mai mult, în cele 8 capitole ale cărții se prezintă, pe rînd, metoda intuiționistă aplicată în diferite domenii : aritmetică, algebră, analiză, logică și, de asemeni, punctul de vedere intuiționist în alte probleme, care nu intră în discuția noastră. Primul capitol, intitulat „Discuție", pune problema intuiționismului.

— N-ai vrea să citim ceva din el ?

— Am să încerc. După cîteva fraze introductive, *Int* spune : „Părerea că pentru a descrie un anumit fel de obiecte ar fi mai potrivită altă logică decît cea obișnuită a fost descori discutată. Dar Brouwer este primul care a descoperit un obiect care cere acum o altă formă de logică, anume construcția matematică mintală (L.E.J. Brouwer, 1908). Pricina este că în matematică am avut de-a face întotdeauna cu infinitul, iar logica obișnuită a fost făcută pentru raționamentele privind mulțimile finite". La obiecția făcută de *Class*, că logica este universală și se aplică atît la problemele infinite, cît și la cele finite, *Int* îi prezintă programul lui Brouwer din 1907 : „El constă în investigarea construcțiilor matematice mintale ca atare, fără referințe la întrebări privind natura obiectelor construite, ca și cum ele ar exista independent de cunoașterea noastră despre ele. Că acest punct de vedere conduce la excluderea principiului terțiului exclus, se poate demonstra printr-un exemplu : Să comparăm două definiții ale numerelor naturale pe care să le numim k și l.

1. k este cel mai mare număr prim așa fel ca numărul $(k-1)$ să fie de asemeni prim, sau $k=1$, dacă un asemenea număr nu există.

2. l este cel mai mare număr prim așa fel că $(l-2)$ să fie de asemeni prim, sau $l=1$, dacă un asemenea număr nu există.

În matematica obișnuită, clasică, nu se ține seamă de deosebirea esențială dintre aceste două definiții. k poate fi calculat $(k=3)$, pe cînd pentru calcularea lui l nu există nici o metodă, pentru că nu se cunoaște dacă șirul perechilor de numere prime p și $(p+2)$ este finit sau infinit".

— În adevăr, există un singur număr prim $k=3$ astfel încît $3-1=2$, este tot un număr prim. E singurul, căci din oricare alt număr prim am scădea pe 1, se obține un număr pereche, adică neprim. Din contra, în cazul al doilea există multe perechi ce satisfac condiția dată: $5-2=3$, $7-2=5$, $13-2=11$,... avem așadar șirul de perechi (3, 5), (5, 7), (11, 13) ... despre care nu putem afirma dacă este finit sau infinit.

— Tocmai de aceea, *Int* nu admite că a doua condiție poate defini un număr întreg. El spune că intuiționiștii „consideră că un întreg poate fi bine definit numai dacă există o metodă prin care să poată fi calculat. Acest mod de gîndire conduce la excluderea principiului terțiului exclus pentru că, dacă șirul perechilor prime este finit sau infinit, condiția 2 va defini un întreg".

— Așa-i, căci în acest caz nu există numai două posibilități, dintre care să putem afirma cu precizie pe care o alegem: însă *Class* respinge afirmația lui *Int* și pretinde că și în a doua condiție definiția lui este la fel de bine precizată căci, dacă perechile de numere prime sînt infinite, atunci se consideră $l=1$, iar dacă numărul lor este finit, l este cel mai mare dintre aceste perechi astfel că $l-2$, să fie prim. Ce importanță are, dacă acest număr poate fi calculat efectiv, sau nu ?" adaugă el, la care *Int* replică: „Argumentul adus este de natură metafizică. Dacă *a exista* nu înseamnă *a fi construibil*, atunci aceasta trebuie să aibă un sens metafizic. Și nu poate fi sarcina matematicianului să cerceteze acest înțeles sau să decidă dacă el este acceptabil sau nu. Nu avem nici o obiecțiune contra unui matematician care vrea să admită, în particular, orice teorie metafizică ce îi place, dar în programul lui Brouwer se consideră că noi studiem matematica într-un fel mai simplu și mai imediat decît metafizica. În studiul construcțiilor matematice mintale, *există* trebuie să fie sinonim cu *a fi construibil*. *Class*: Altfel spus, atîta vreme cît nu știm că există o ultimă pereche de numere prime, condiția 2 nu este o definiție a unui întreg, dar imediat ce problema a fost rezolvată, condiția 2 devine dintr-o dată o definiție. Să presupunem că la 1 ianuarie 1970 (cartea a apărut în 1956) s-a putut dovedi că există o infinitate de perechi

prime, din acel moment $l=1$. Înainte de această dată nu a fost ?“ (Menger, 1930).

— Mi se pare că *Int* se află în impas ! Cum se descurcă ?

— Foarte simplu. El amintește că pentru intuiționist o propoziție matematică afirmă faptul că o anumită construcție matematică a fost executată. Înainte ca această construcție să fi fost executată, ea nu exista. Înainte de 1 ianuarie 1970 nu se dovedise că $l=1$. Dar nu aceasta este ce ai gîndit, adaugă el ! „Mi se pare că pentru a clarifica sensul întrebării puse, trebuie să ne referim din nou la noțiuni metafizice : la o anumită lume de lucruri matematice care ar exista independent de cunoașterea noastră, unde $l=1$ este adevărat într-un anume sens absolut. Dar, repet că matematica nu trebuie să depindă de asemenea noțiuni“.

— Bine, dar aceasta este veșnica, veche și nouă dilemă : sînt adevărurile matematice *descoperite* sau *inventate ?* Încă de pe vremea lui Platon, unii matematicieni credeau că adevărurile matematice există în lume independent de cunoașterea lor de către om, că ele reprezintă niște adevăruri absolute, iar treaba matematicianului este să le descopere. Acești matematicieni consideră că ei descoperă o parte din realitate : pentru ei, de pildă, teoremele din teoria numerelor naturale sînt descoperiri tot așa cum sînt și descoperirile fenomenelor fizice de către fizicieni sau descoperirea planetelor de către astronomi. Alți matematicieni, din contra, consideră că sarcina matematicianului este *să inventeze* și să *creeze matematica,* nu să o descopere. De pildă, Kronecker.

— De altfel, chiar și matematicienii care cred că matematica este descoperită trebuie să admită că și în domeniul numerelor întregi există capitole care au fost *inventate* de om, și nu descoperite. De pildă, noțiunea numărului *zero* a fost inventată de hinduși și nu descoperită, la fel sistemul zecimal. Aceste două invenții au contribuit mult la progresul și dezvoltarea tehnicii.

— După răspunsul pe care un matematician îl dă la întrebarea dacă matematica a fost descoperită sau inventată, el se încadrează în unul sau altul dintre curentele pe care le-am discutat și le discutăm. Logisticienii, de pildă, consideră că matematica se descoperă, intuiționiștii că este inventată. De aceea, intuiționiștii pretind că dovada *existenței* unui

obiect matematic se face prin *construirea lui*, iar acest fapt a făcut ca în loc de *matematică intuiționistă* să se folosească și denumirea de *matematică constructivă*.

— Dacă ne reîntoarcem la cartea lui Heyting, ca să mai urmărim discuția la care am asistat, îl găsim pe *Int* spunînd: „Matematica intuiționistă constă în construcții mintale; o teoremă matematică exprimă un fapt pur empiric, anume succesul unei anumite construcții. „$2+2=3+1$" trebuie să fie citită ca o prescurtare a propoziției: „Am efectuat construcția mintală indicată de „$2+2$" și de la „$3+1$" și am găsit că ele duc la același rezultat".

— Dați-mi voie, dragă profesore, să vă întrerup, căci mi-am adus aminte de un frumos exemplu pe care l-am citit în cartea lui Beth (7, p. 158), de unde metoda intuiționistă de gîndire apare, parcă, mai amplu conturată și completează astfel exemplul dat de Heyting. Anume, e vorba de discuția unei ecuații algebrice de gradul întîi cu o singură necunoscută: $ax+b=0$.

În algebra elementară se consideră cele trei cazuri:

1. $a\neq 0$, în acest caz $x=b/a$ este rădăcina ecuației și ea e singura valoare posibilă a lui x care satisface ecuația.

2. $a=0$, $b\neq 0$; nici o valoare a lui x nu satisface ecuația.

3. $a=0$, $b=0$; orice valoare a lui x verifică ecuația.

Din punct de vedere *intuiționist*, lucrurile nu se prezintă așa de simplu.

Să presupunem că a este definit astfel: Dacă n este cel mai mic număr natural k, astfel încît zecimala de ordinul k din expresia $(\pi+e)^{\pi-e}$ să fie primul termen dintr-o serie de 100 de cifre egale, atunci $a=(-1/10)^n$ și dacă nu există numărul k astfel definit, atunci $a=0$. Numărul b se definește într-un mod asemănător, anume dacă n este cel mai mic număr natural, k astfel încît zecimala de ordinul k din expresia numerică $(\pi-e)^{\pi+e}$ să fie primul termen dintr-o serie de 100 cifre egale, atunci $b=(-1/10)^n$, și dacă un asemenea număr nu există atunci $b=0$. Cum rezolvăm problema în acest caz? Putem ști în care din cele trei situații ne aflăm, adică putem aplica principiul terțiului exclus? Nu! Există deci un al patrulea caz, de care algebra clasică nu ține seamă, care ne arată, pe de o parte că nu toate problemele pot fi rezolvate și, pe de alta, că există o limită pînă la care se poate aplica principiul terțiului exclus.

— În adevăr, ai găsit un foarte interesant exemplu de construcție mintală, pe care o aduce în discuție intuiționismul ! Eu am să folosesc prilejul ca să atragă atenția asupra unei comunicări făcută de Heyting, care se află în această carte tipărită de el : *Constructivity in Mathematics* (28, p. 69), anume, ei observă că trebuie să se facă deosebire între : a) *o teorie a constructibilului* și b) *o teorie constructivă*, arătînd că : „Într-o teorie a constructibilului se definește o anumită clasă de obiecte matematice ca fiind obiecte constructibile. În acest caz, trei puncte sînt esențiale : 1) Se presupune că există o teorie matematică în care poate fi definită clasa obiectelor constructibile ; 2) Noțiunea de constructibilitate este o noțiune definită și nu o noțiune primitivă ; 3) Există o anumită libertate în alegerea unei definiții a constructibilului, cu condiția, numai, ca să corespundă în mod suficient cu noțiunea noastră intuitivă despre o construcție matematică. Printr-o *teorie constructivă* înțeleg o teorie în care un obiect este considerat că există, numai după ce a fost construit. Cu alte cuvinte, într-o serie constructivă nici nu pot fi menționate altfel de obiecte decît constructibile. Personal, eu sînt atras de matematica constructivă, căci sînt incapabil să dau un sens inteligibil afirmației că există un obiect matematic care nu a fost construit... Cerința ca să fie considerate sau menționate numai obiectele constructibile este suficientă ca să explice particularitățile matematice intuiționiste. Din faptul că numai obiectele construibile sînt considerate că există urmează că ele nu formează o subclasă a clasei tuturor obiectelor matematice. În teoria constructivă nu există referințe la un sistem matematic precedent... Noțiunea de obiect constructibil trebuie să fie o noțiune primitivă în sensul că trebuie să fie clar ce înseamnă că o anumită operație arată construcția unui anumit obiect".

— Însă dacă ni se spunea *ce se înțelege* printr-o *teorie constructivă*, asta nu înseamnă și că ea *a fost definită* !

— Desigur că nu, și nici nu se încearcă aceasta, fiindcă în *altă conferință* din aceeași carte se arată că orice încercare de *a defini noțiunea de teorie constructivă* duce la *un cerc vicios*, pentru că definiția însăși conține un cuantificator existențial, care, la rîndul lui, trebuie interpretat în mod constructiv !

— Iată o lecție bine învățată de intuiționiști. Dar despre intuiționism Șt. Körner mai are multe să ne învețe. De pildă (13, p. 160), iată ce ne spune despre program din punct de vedere al filosofiei matematice : După părerea lui Brouwer, „matematica practicată de preintuiționiști și formaliști consta din două părți separate — o matematică autonomă, și o matematică a cărei certitudine depindea de limbaj și logică. Pentru matematica autonomă, *existența exactă, certitudinea absolută și necontradicția erau universal recunoscute, independent de limbaj și fără demonstrație.* Ea îmbrățișa *teoria elementară a numerelor naturale, principiul inducției complete și părți mai mult sau mai puțin considerabile din algebră și teoria numerelor.* Matematica neautonomă îmbrățișa teoria continuului numerelor reale... Tezele fundamentale ale filosofiei intuiționiste a matematicii sînt clar formulate de Brouwer. El le descrie ca *două acte* prin care intuiționismul *a intervenit* în situația creată de predecesorii săi și de formaliști... Cel mai nimerit este să cităm aici pe larg din lucrarea sa : „*Primul act de intuiționism* separă complet matematica de limbajul matematic, în particular de fenomenele de limbaj descrise de logica teoretică, și recunoaște că matematica intuiționistă este o activitate a minții, esențialmente independentă de limbaj.



Luitzen Eghertus Jan Brouwer

... După cum experiența, să zicem, a ascensiunii unui munte nu trebuie confundată cu descrierea și comunicarea ei lingvistică pentru alții, tot astfel experiența intuițiilor și construcțiilor matematice nu trebuie confundată cu descrierea și comunicarea sa lingvistică... După Brouwer, principiile logice clasice sînt reguli lingvistice prin faptul că cei care le *respectă din punct de vedere lingvistic pot* — dar nu este necesar — *să fie conduși de experiență*... Matematica în esență este independentă, în acest sens, nu numai față de limbaj, dar și față de logică".

— Faptul îl repetă și Heyting într-o conferință (9, p. 16) : „Noi nu putem rămîne indiferenți față de tendințele totalitare ale mișcării pentru unitatea științei. Ceea ce ne separă de adepții acestei școli este aprecierea rolului limbii. Noi susținem că misiunea științei nu constă în studiul limbilor și nici în aceea a ideilor pe care limba încearcă să le exprime, ci în creația acestor idei însăși".

— Cu alte cuvinte, cum am mai spus, intuiționiștii consideră matematica drept o funcție naturală a intelectului, o activitate autonomă a gîndirii, liberă și suficientă sieși, și, în această calitate, ea își dă contribuția în orice alt sector al activității omenești : știință, filosofie, logică sau în domeniul practic. Și tocmai această *autonomie* a ei o face să fie independentă de logică, numai logica depinde de matematică. De aceea, intuiționistul nu face mare haz de logică și are pretenția că logistica să se separe de matematică, motivînd că aceste două obiecte sînt legate doar prin limbajul matematic, care însoțește construcțiile logistice !

— Fiindcă-i vorba de limbaj, mi-am amintit și mă întorc iar la Hilbert. Prea dură îmi pare caracterizarea pe care o face Brouwer axiomatizării lui Hilbert : „un monument verbal", fără nici o interpretare matematică, căci axiomele lui nu mai corespund punctului de vedere euclidian ! El nu mai definește punctul, dreapta etc. în mod constructiv, ci le enunță numai proprietățile fundamentale. Cît despre formalism, deși Brouwer constată că există anumite asemănări între punctul de vedere finitist din metamatematica lui Hilbert și tezele finitiste ale intuiționismului, deosebirile dintre ele sînt esențiale. O arată și Bernays, în articolul ce l-am amintit data trecută : „Asupra

chestiunilor de metodologie actuală ale teoriei hilbertiene a demonstrației". Am amînat discuția lui pe azi, cînd ne ocupăm de intuiționism, fiindcă și Bernays face trimiteri la intuiționism, deși se ocupă de modificările impuse teoriei demonstrației, ca urmare a teoremei lui Gödel. „În termeni tehnici", spune Bernays, „e vorba de următoarele : pentru raționamentele metamatematice trebuie mijloace mai tari decît acelea la care a intenționat să se restrîngă Hilbert, în sensul gîndirii finite. Necesitatea unei asemenea lărgiri a metodei apăruse chiar de la problema — care se considera clarificată — a necontradicției formalismului aritmetic integral. Cu această ocazie s-a revelat că punctul de vedere finitist al lui Hilbert nu este echivalent, cum a apărut la început, cu punctul de vedere intuiționist al lui Brouwer, Gödel a putut arăta că, în domeniul teoriei numerelor întregi, toate raționamentele clasice se pot transforma în raționamente admise de intuiționism, cu ajutorul unei interpretări relativ simple. Astfel deci, necontradicția teoriei numerelor întregi rezultă fără nici o greutate din punctul de vedere intuiționist, prin intermediul acestei interpretări...

Totuși, în domeniul raționamentelor care se reprezintă prin formalismul aritmetic, acordul se poate stabili între partizanii matematicii clasice, care consideră toate aceste raționamente ca legitime și intuiționiștii care nu recunosc principiul terțiului exclus ca fiind general... Constatarea unui raport așa de intim între raționamentele aritmeticii intuiționiste și acelea ale aritmeticii clasice permite mai întîi să tragem concluzia imediată asupra necontradicției formalismului aritmetic obișnuit din punct de vedere intuiționist. Se vede în același timp că există o deosebire esențială între punctele de vedere intuiționist și finitist". (9, p. 144) Mă opresc aici căci nouă ne ajung aceste informații generale, nu-i cazul să intrăm în amănunte. Poate că ne spune Nucu și ceva despre aspectul intuiționist al teoriei mulțimilor.

— Brouwer a criticat teoria mulțimilor, așa cum a fost introdusă de Cantor, atît din cauza *definiției naive a mulțimii*, cît și pentru că a introdus *infinitul actual*, care a dus la aplicarea fără discernămînt a principiului terțiului exclus. Prin infinitul actual, *mărime absurdă* fiindcă nu există în natură și depășește toate limitele, spunea Brouwer, Cantor

a definit *numărul cardinal transfinit*, care nu poate fi intuit, fiind mai mare decît toate numerele cardinale finite. Brouwer a dat noțiunii de mulțime un sens mult mai restrictiv decît acela propus de Cantor. În felul acesta, el a putut evita expresiile neconstructibile, ca, de exemplu, aceea de „mulțimea tuturor mulțimilor" etc.

— Da, știu, el a introdus două noțiuni noi, specifice intuiționismului, aceea de *extindere* și aceea de *specie*. *Extinderea* este modul constructiv de a genera elementele unei mulțimi. Mulțimea se prezintă ca un *șir* care înaintează mereu, spre infinit, termenii șirului fiind determinați de o anumită lege. Iar proprietatea caracteristică a elementelor din mulțimea ce s-a construit este *specia*. Astfel este înlăturată antinomia mulțimii tuturor mulțimilor.

— Nici nu ar mai avea cum să existe, fiindcă mulțimile au devenit *infinit potențiale* și, în acest caz, lor li se poate aplica principiul terțiului exclus fără nici o restricție. Numai în cazul mulțimilor actual infinite, spunea Brouwer, pe lîngă posibilitățile: *A* și non *A* există încă o a treia, care nu poate fi exclusă, după care continuă: „Există o matematică a infinitului potențial... care constituie un fundament intuitiv solid pentru o nouă analiză și deschide un cîmp de dezvoltare care *în multe locuri depășește cu mult granițele matematicii clasice*". Pornind de la aceste observații, Șt. Körner trage concluzia că „domeniul unei noi matematici autonome a infinitului potențial se deschide prin *al doilea act de intuiționism*, care recunoaște posibilitatea de a genera noi entități matematice: mai întîi în forma de succesiuni neîntrerupte p_1, p_2... ai căror termeni sînt aleși în chip mai mult sau mai puțin liber dintre entitățile matematice obținute deja, astfel încît libertatea de alegere, existentă pentru primul termen p_1, poate fi supusă unei restricții durabile în cazul unui termen următor p_r ..."

— Da, asta-i *extinderea* și *specia* care era logic să fie introduse, pentru ca astfel intuiționismul să poată accepta mulțimile infinite.

— Este, dar Körner spune și ceva mai mult în privința logicii pe care ai invocat-o ca argument: „Intuiționistul nu se ocupă cu logica în general, ci numai cu logica matematicii, adică *logica matematică*, nu cu sensul de logică

generală matematizată, ci de formulare de principii întrebuințate în activitatea de construcție matematică".

— Admițînd, odată cu Brouwer, că activitatea matematică are un caracter creator, specific constructiv înțelegem de ce el a fost obligat să-și creeze un instrument propriu, o *logică intuiționistă*.

— Aveți dreptate, stimate profesore, și de aceea chiar primele studii de logică intuiționistă au fost făcute de Brouwer. El a pus în evidență faptul că logica trebuie să se adapteze necesităților gîndirii matematice intuiționiste, căci matematica intuiționistă este complet independentă de logică. Apoi, aceste rezultate au fost continuate de Heyting, care are și meritul de a fi formalizat primul logica intuiționistă. Și, în acest scop, el a folosit notațiile logicii simbolice din *Principia mathematica*.

— Îmi place că intuiționiștii s-au dat la brazdă și au început să cocheteze cînd cu formalismul, cînd cu logicismul...

— Exagerați, stimate profesore ! Logica matematică este privită de intuiționiști după cum am mai spus, numai ca *instrumentul* prin care își formulează *principiile pe* care le urmează în construcțiile sale matematice. După cum știm, căci am discutat-o de mai multe ori, logica obișnuită se bazează pe principiul contradicției și al terțiului exclus, care spune că afirmațiile A și non-A nu pot exista amîndouă deodată : dacă una este adevărată, cealaltă este falsă. Logica intuiționistă, din contra, este construită pe concepția că numai *principiul contradicției este valabil întotdeauna*, pe cînd *principiul terțiului exclus se aplică numai în anumite cazuri*. Ea admite că propozițiile sale sînt susceptibile de trei valori : adică sînt *fie adevărate, fie false*, fie astfel că, *deși nu-s false, adevărul lor nu se poate dovedi*. În felul acesta, principiul terțiului exclus nu mai apare ca un caz particular al disjuncției A sau $B (A \vee B)$ în care $B = \bar{A}$, de unde rezultă A sau $\bar{A}$: $(A \vee \bar{A})$. În logica intuiționistă înțelesul negației unei propoziții nu-i bine determinat și este cu totul deosebit de acela pe care îl are în vorbirea de toate zilele. De aceea, Heyting a și introdus un semn nou pentru negație ($\neg$), care să o deosebească de negația din logica simbolică obișnuită.

— Să vedem mai îndeaproape, cum ar veni asta : O propoziție A se spune că este adevărată din punct de vedere intuiționist dacă *se poate construi efectiv*, construcția fiind dovada de netăgăduit a adevărului propoziției A. Însă propoziția $\neg A$ poate fi afirmată numai și numai dacă *se poate stabili o altă construcție care să ducă la contradicție*, în ipoteza că A a fost construit ! Prin urmare, în logica intuiționistă, principiul terțiului exclus: $A \vee \neg A$ nu este adevărat decît atunci cînd există o construcție a lui $\neg A$, care să stabilească absurditatea lui A, adică faptul că propoziția A duce la o contradicție.

— Și, în cazul mulțimilor infinite, cum stabilești că este absurd că A nu-i adevărat, dacă nu-l poți construi ? Absurditatea absurdității nu implică adevărul, pe cînd *adevărul* implică absurditatea absurdității" a spus Brouwer, înțelegînd prin „absurditatea absurdității" tocmai acest caz deosebit cînd nu se poate afirma nici adevărul și nici falsitatea.

— Hai să ne jucăm și să transcriem în mod formal că adevărul implică absurditatea absurdității (de ex. : imposibilitatea lui $a \neq b$ înseamnă $a = b$).

— Bine, Bădie, nu-i mare lucru : $(\vdash A \rightarrow \neg\neg A)$. După cum vezi, am pus și $\vdash$.

— Văd eu că ai pus tu și *semnul de aserțiune*, dar totuși, mie îmi pare că negația asta intuiționistă îi cam buclucașă ! $\neg A$ înseamnă că am efectuat o construcție B, care arată o contradicție în presupunerea că aș putea găsi mintal sau aș putea efectua construcția A. Dar ceea ce se aplică propoziției $\neg A$ trebuie să se aplice și propoziției $\neg\neg A$, deoarece $\neg\neg A$ nu implică adevărul, adică pe A. Or, de aici rezultă că nici o experiență care se exprimă prin negație intuiționistă nu-i evidentă în sine.

— Are dreptate Bădia, dragă Nucule. La pagina 120 din cartea din care am citit, Heyting vorbește despre „Matematica intuiționistă fără negație", concepută de Griss, care a reușit să stabilească unele rezultate remarcabile în această direcție.

— Aici, dragă Toa, dă-mi voie să te întrerup. Aș vrea să știu, cum de i-a venit lui Griss o asemenea idee năstrușnică ? Cînd vorbim între noi, pot foarte bine să înlocuiesc

negația: *nu ești frumos* — cu afirmația *ești urît* —, dar în matematică ?

— La fel și aici. În loc să spun că într-un plan două drepte nu sînt paralele, pot spune că ele se întîlnesc, sau în aritmetica numerelor întregi și raționale negația ($a \neq b$) adică: „a nu este egal cu b" se poate înlocui cu una dintre afirmațiile $a > b$ sau $a < b$. Bineînțeles că aceste exemple nu se pot generaliza, cu alte cuvinte treaba nu-i chiar așa de simplă ! Dar cu aceasta nu am răspuns încă nedumeririi tale. Explicația o dă Heyting, care spune așa : „Obiecțiile serioase contra folosirii negației în matematică au fost aduse de Griss... Deși este complet de acord cu ideile de bază asupra naturii matematicii, el susține că dacă o noțiune matematică își are originea ei într-o construcție matematică ce poate fi executată, atunci cînd construcția este imposibilă, noțiunea nu poate fi clară. Brouwer admite o teoremă ca : „un cerc pătrat nu poate exista" ; noi o putem dovedi stabilind o contradicție din presupunerea că am construit un pătrat care ar fi, în același timp, și un cerc. După Griss, această presupunere nu este clară, din cauză că nu poate fi niciodată realizată. Cu alte cuvinte, dacă un cerc pătrat nu poate exista, cum putem avea o noțiune clară despre ceea ce ar putea fi dacă ar exista ? De aceea, Griss respinge negația dintre noțiunile matematice".

— Aici Heyting nu-i de acord cu Griss fiindcă, spune el, deși „noțiunea de negație are pentru noi mai puțină importanță decît în matematica obișnuită", ea este înlocuită cu noțiunea pozitivă *numai cînd aceasta este posibil*. În celelalte cazuri, Brouwer și Heyting au introdus un nou simbol de *inegalitate* între numere, „mai tare" decît simpla inegalitate, anume pe aceea de *separație*. Cînd scriu $a \neq b$ această relație reprezintă negația obișnuită a egalității dintre a și b. Intuiționiștii nu o consideră însă suficient de clară și Brouwer folosește noțiunea de „separație", notată prin simbolul $\#$, cu observația că $a \# b$ atrage după sine $a \neq b$, dar aserțiunea inversă nu-i adevărată. Iată cum este introdus acest nou simbol : dacă se consideră două numere reale a și b, definite ca limitele unor șiruri convergente de numere raționale $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots a_{n+p} \ldots$ și $b_1, b_2 \ldots b_n \ldots b_{n+p} \ldots$, se spune că *a este separat de* $b (a \# b)$, dacă se pot găsi doi întregi n

şi k, astfel că pentru orice p, să avem $\left|a_{n+p}-b_{n+p}\right| > \frac{1}{k}$.
Aşadar, în cazul separaţiei a două numere, se cere să se precizeze numerele n şi k, condiţie ce nu se pune în cazul simplei negaţii $a \neq b$. (27, p. 19)

— Dacă ai făcut această completare, pe care îţi mărturisesc că aveam de gînd să o las deoparte, atunci mă văd obligat să citesc încă vreo cîteva rînduri despre Griss, din capitolul început. „Prima noţiune negativă care apărea în această lucrare era aceea a neegalităţii dintre numerele reale, $a \neq b$. Griss nu putea admite această noţiune ca bine definită; el a folosit în schimb relaţia $a \# b$, care este definită pozitiv. Însă, printre proprietăţile de bază ale acestei relaţii $\#$ este următoarea: $\neg a \# b \rightarrow a = b$. În locul acestei proprietăţi, Griss foloseşte ..." (27, p. 121)

— Bine faci că te-ai oprit, căci nu are rost să urmărim detaliul, ne interesează faptul în sine, acela că dacă intuiţioniştii nu se înţeleg nici între ei, ce mai avem de discutat despre acei ce nu le împărtăşesc principiile! Au reuşit ei să elimine antinomiile, în schimb, le-a venit pe cap beleaua *negaţiei intuiţioniste*, care nu-i cu nimic mai prejos decît aceea de care au vrut să pătimească logiciştii şi formaliştii, atît din cauza antinomiilor, cît şi din cauza teoremei lui Gödel.

— Ba eu aş vrea să mai discutăm şi despre acei ce nu le împărtăşesc principiile, cum spui tu. Nu vreau să trec peste părerile exprimate de Gonseth în *Fundamentele* lui (12, p. 193), cum ar fi, de pildă, acestea: „Brouwer admite, se pare, fără restricţiuni, următoarea axiomă (de logică): Toate categoriile infinite se sustrag de drept principiului terţiului exclus, principiul păstrîndu-şi valabilitatea pentru categoriile finite... Trebuie să observăm că radicalismul intuiţioniştilor depăşeşte puterea de înţelegere a observaţiei, în ea însăşi de o exactitate indiscutabilă, că principiul terţiului nu-i aplicabil întotdeauna. De la acest fapt, constatat cu certitudine în anumite cazuri, ei trec brusc la afirmaţia... că principiul nu-i niciodată valabil de îndată ce-i vorba de categorii infinite. Nu cred că se va renunţa vreodată să spunem că *orice* număr întreg este par sau impar, afirmaţie care are cu siguranţă un sens, iar dacă

în acest caz pretindem că al treilea este exclus, nu-i din cauza unui principiu formal oarecare, ci tocmai în urma cunoașterii directe și intuitive a ceea ce reprezintă această mulțime. Este poate indicat să citim aici o observație a lui Brouwer : „Chiar dacă aplicarea principiului terțiului exclus nu ar conduce niciodată la o contradicție, nu-l putem considera ca legitim, după cum o crimă care nu-i dovedită de judecători, nu încetează de a rămîne o crimă". Brouwer consideră — se vede — principiul său „după care principiul terțului exclus nu se aplică la mulțimile infinite " ca expresia unui adevăr absolut. Așadar, analiza operează cu noțiuni greșite — deși eroarea ar putea rămîne secretă — și intuiționistul nu poate vedea în ea decît un joc al spiritului extrem de strălucitor, dar nu o știință. Acest punct de vedere este desigur dintre cele mai interesante. El prezintă un amestec curios de critică ascuțită și de dogmatism cu un caracter aproape teologic". La pagina 230, Gonseth este și mai categoric : „Intuiționiștii — și înaintea lor empiriștii ca Baire și Borel — dau dovadă de o stranie timiditate în fața infinitului, pe care-l consideră, pur și simplu, de neînțeles. Ei acceptă ca dogmă afirmația următoare : „Spiritul omenesc nu-i capabil decît de un număr finit de acte de gîndire ! " Cel mai uimitor ne pare a fi faptul că ei sînt convinși că această frază are un înțeles... infinitul în matematică pare să fie puntea aruncată între două concepte ireductibile unul de celălalt numai prin logică. Formarea conceptelor este un act al gîndirii absolut irațional : să vrei ca el să fie finit înseamnă să vrei ca el să nu fie. Aplicate la activitatea gîndirii, cuvintele finit sau infinit își pierd sensul lor. Infinitul matematic este un concept derivat, explicativ, ca și numărul, este poate cel mai necesar, cel mai prețios și cea mai legitimă dintre toate noțiunile matematice. Dacă se acceptă acest mod de a vedea, infinitul nemai-avînd decît o semnificare relativă, teza intuiționistă nu poate fi apărată ; ea se bazează pe caracterul absolut al finitului și al infinitului chiar și în intervențiile gîndirii. Considerată astfel, această revoluție ar putea fi ușor interpretată ca cea mai reacționară interzicere de a gîndi. Trecerea la concept reprezintă o accelerație nedefinită a gîndirii, nu avem nimic de profitat dacă refuzăm acest dar al zeilor".

— Gonseth a publicat aceste observații în 1926, după cîte văd ! Problemele puse de el au fost discutate și încă se discută. Dovadă este cartea apărută în 1959, *Constructivitatea în matematică* (28), în care Heyting a publicat comunicările ținute la Amsterdam, în 1957, despre acest subiect. Dintre acestea, deosebit de interesantă pentru discuția noastră îmi pare conferința lui Andrzej Mostowski (p. 179) : „Despre diferitele grade ale constructivismului" și aș vrea să o privim mai îndeaproape. Mostowski pornește de la observația că orice analiză a noțiunilor generale matematice sau nematematice presupune o anumită orientare filosofică ce poate fi spre *idealism* (în sensul platonic al cuvîntului) sau spre *nominalism.*

— Nominaliștii sînt aceia care consideră că numai lucrurile individuale au existență reală, pe cînd conceptele generale nu există, ele fiind simple denumiri ? Așadar, constructivismul reprezintă direcția nominalistă din fundamentele matematicii ?

— Da. Și acest caracter nominalistic al constructivismului se pune în evidență prin aceea că intuiționiștii nu acceptă noțiunile generale ale matematicii : număr, mulțime, funcție etc. ca fiind date, ci încearcă să le construiască, cu alte cuvinte să le definească în modul specific cerințelor constructivismului.

— Foarte interesantă este observația autorului că „în ciuda deosebirilor profunde dintre concepțiile de bază ale constructivismului și ale matematicii clasice (platonică) există ramuri ale matematicii în care teoriile, bazate respectiv pe ambele concepții, au dus la rezultate pe de-a-ntregul echivalente. Acesta este cazul, de exemplu, pentru aritmetica întregilor, a cărei fundamentare clasică este dată de teoria lui Frege și cea constructivă stabilită de recenta teorie a lui Lorenzen (1955), în care un întreg este identificat cu un simbol care constă din linioare consecutive. Ambele teorii sînt, matematic, echivalente. Din punct de vedere filosofic, teoria constructivă este chiar mai satisfăcătoare decît cea clasică, din cauză că ea permite dezvoltarea aritmeticii fără a mai presupune existența mulțimilor infinit actuale, ipoteză necesară în teoria clasică". Mostowski arată că există și alte teorii echivalente, rezultate prin stabilirea lor pe cale clasică sau intuiționistă, cum ar fi aritmetica

numerelor raționale și artitmetica numerelor algebrice. „Diferența esențială între calea constructivă și cea clasică", spune autorul, „apare în teoriile privind mulțimile nenumărabile. La aceste teorii aparțin, întîi, aritmetica numerelor reale, analiza (adică teoria funcțiilor arbitrare de numere reale) și teoria mulțimilor". Ne oprim aici, căci mai departe autorul își propune să dezvolte unele teorii legate de fundamentarea constructivă a aritmeticii numerelor reale, de fundamentarea analizei și a teoriei mulțimilor.

— Asta înseamnă că îi vine rîndul cărții lui Bishop, cu care te făleai la începutul discuției noastre ?

— Ai ceva contra, dragă Teodor ? Deocamdată ți-o dau să te uiți printr-însa, că eu mai am niște treburi.

— Dacă-i vorba de cafea, dragă Bădie, nu mă dau în lături !

— Atunci vino de-mi ajută ! Tu pune ibricul că eu mi-am adus aminte să mai caut ceva prin dulap.

— Bună cafea, Nucule, de acuma te învestesc pe tine cu trebușoara asta !

— Și eu adaug : „Vrednic este". Cît privește cartea lui Bishop (29), după titlu : *Fundamentarea analizei constructive*, și după cîte am putut să-mi dau seama cît am răsfoit-o, pare foarte serioasă !

— Eu am întîlnit, în cîteva articole recente, citat și autorul și cartea pe care o avem, de altfel, în Biblioteca Seminarului. Nu știam însă că mata, Bădie, ți-ai procurat-o personal.

— Întîmplarea a făcut să o pot căpăta și mi-a făcut cu adevărat plăcere. Cartea aceasta înseamnă un mare succes pentru intuiționism, pentru că Bishop a găsit metode efective ca să se realizeze constructivismul.

— Asta-i bună ! Dar Brouwer și Heyting ce au făcut ?

— Ei au făcut altceva. Ei au căutat să stabilească mai mult o *fundamentare* constructivă a matematicii, au considerat problema în general, dar nu au realizat-o tehnic. Bishop *nu mai aruncă teorii întregi*, cu greu agonisite, *dincolo de gardul matematicii*, ci le *păstrează*, silindu-se să le dea interpretarea intuitivă de care aveau nevoie. El a găsit modalitatea de a da o formă constructivă acelor teorii despre care spunea și Mostowski că, din punct de vedere intuiționist, se deosebesc esențial de matematica

obişnuită : teoria numerelor reale, teoria mulţimilor etc. Dar mai bine, hai să urmărim împreună, deocamdată, *prefaţa*. Cred că vă va părea curioasă, căci deşi e scrisă în 1967, pare că s-ar potrivi mai bine cu 40—50 de ani în urmă. Iată cum începe : „Multor matematicieni le-ar veni greu să creadă că pot exista neînţelegeri serioase în legătură cu fundamentele matematicii, unele dintre ele putînd afecta chiar propria lor activitate matematică".

— Am înţeles, nu-ţi place această frază, ţi se pare anacronică ! Dar nu este. Crezi că dacă pe noi ne-au interesat fundamentele matematicii, este obligatoriu ca *toţi* matematicienii să se ocupe de acest lucru ? Deloc ; ei urmăresc domeniul lor de predilecţie şi acolo sînt la ei acasă ; de rest, adică de fundamente, habar n-au. Ei cunosc literatura din specialitatea lor strictă, pot urmări articolele respective şi cred că fac destul. Aşa că, pentru aceştia, introducerea e foarte bună şi te rog citeşte mai departe.

— Poate că ai dreptate. Atunci ascultaţi : „Atitudinea lor reprezintă starea actuală a lucrurilor : timp de o jumătate de secol, de un splendid progres matematic, nu a fost nici o deviaţie de la normal. Vocea disidenţilor, neluată niciodată prea în serios, a tăcut mult timp. Poate că nu era încă vremea favorabilă introspecţiilor. Matematica înflorea ca niciodată mai înainte. Scopul ei este imens, calităţile ei superioare... metodele matematice sînt mai maleabile decît înainte. Dovadă, valul de interes pentru logica matematică, biologie matematică, economie matematică, psihologie matematică şi investigaţiile matematice de orice fel. Ele arată adînca atracţie pe care o are mintea contemporană pentru exactitatea matematică.

Şi totuşi, există nemulţumiri în comunitatea matematică. Matematicianul pur este izolat de lume, care are puţină nevoie de creaţiile lui strălucitoare. El suferă de o alienare care apare inevitabilă : a urmărit raza strălucitoare şi ea l-a scos din lumea aceasta... Matematica este un amestec de real şi ideal, uneori apare una, alteori alta, încît e greu să precizăm care faţă s-a arătat. Componenta realistă a matematicilor, dorinţa pentru interpretarea pragmatică, îngrijeşte controlul care determină mersul dezvoltării şi împiedică matematica să cadă într-un formalism fără de înţeles. Componenta idealistică permite simplificări şi îi

deschide posibilitățile care altfel i-ar fi închise. Teoria demonstrației și obiectivul investigației fusese realizat să formeze un joc, dar actuala comportare a jocului este motivată de considerații pragmatice. De acum 50 de ani nu s-au mai făcut schimbări semnificative în regulile acestui joc. Matematicienii erau unanim de acord cum trebuie jucată matematica... Au existat totuși și încercări de a constructiviza matematica, pentru ca să fie purificată complet de conținutul ei idealistic. Cea mai susținută încercare a făcut-o E. E. J. Brouwer începînd din 1907. Mișcarea pe care a inițiat-o a murit demult, ucisă în parte de compromisurile discipolilor lui Brouwer față de punctul de vedere idealist, în parte de particularitățile străine ale sistemului lui Brouwer care-l făceau să pară vag și chiar ridicol matematicienilor ce-l practicau, dar, mai ales prin nereușita lui Brouwer și a urmașilor săi în încercarea de a convinge pe matematicieni că părăsirea punctului de vedere idealist nu va steriliza sau paraliza dezvoltarea matematicii. Brouwer și alți constructiviști au avut mai mult succes prin criticarea matematicii clasice, decît prin sforțarea lor de a o înlocui cu ceva mai bun. Mulți matematicieni familiarizați cu obiecțiunile lui Brouwetr asupra matematicii clasice admiteau valabilitatea lor, dar nu erau convinși că ar putea exista o alternativă satisfăcătoare".

— Găsesc juste observațiile lui Bishop, dar m-a izbit afirmația că mișcarea întemeiată de Brouwer a murit de mult. Nu a trecut nici un ceas de cînd pentru noi trei, ea era în plină desfășurare.

— Dacă admitem că nu-i vorba de o moarte naturală, ci de o *ucidere,* cum o spune și el, în acest caz, poate că are dreptate, dat fiind că intuiționismul, așa cum a fost el creat, la început nu și-a păstrat puritatea lui originală, căutînd motive, ba să se formalizeze, ba să se axiomatizeze !

— Aici poate că ai ajuns chiar la părerea lui Bishop, care urmărește să revină la intuiționismul pur, fără compromisuri. De aceea, poate că nici nu-l considera pe Heyting ca intuiționist, căci niciodată nu-i citează rezultatele ci numai cartea lui Heyting *Intuiționismul* e trecută în bibliografie. Urmărind mai departe prefața, Bishop spune pe șleau : „Această carte este o piesă de propagandă constructivistă, destinată să arate că există o alternativă satisfă-

cătoare. În acest scop, noi dezvoltăm o largă porțiune a analizei abstracte într-un mod constructiv... Programul nostru este simplu: să dăm interpretări numerice la cît mai multe dintre noțiunile clasice din analiză. Motivarea noastră este binecunoscutul scandal, expus de Brouwer (și alții) în amănunțime, că matematica clasică este lipsită de înțeles numeric".

Ca să realizeze acest program, Bishop se bazează pe trei principii fundamentale: 1. Să facă toate noțiunile afirmative (chiar și noțiunea de inegalitate este afirmativă). 2. Să evite definițiile care nu sînt potrivite (noțiunea de funcție continuă într-un punct nu-i potrivită. O funcție continuă este aceea care este uniform continuă pe intervale compacte). 3. Să se evite pseudogeneralități. (Ipotezele separabilității sînt folosite în mod liber). În încheiere, Bishop arată că „această carte are un triplu scop: 1) să prezinte punctul de vedere constructivist, 2) să arate că programul constructivist poate fi realizat, 3) să pună o bază pentru cercetările viitoare. Acest scop va grăbi ziua cînd matematica constructivă va fi acceptată ca normală".

— Ce ți-e și cu constructiviștii! Toți au ideea fixă că numai părerile lor trebuie acceptate ca singurele valabile! Nu degeaba au fost acuzați de fanatism, de subiectivism, ba chiar și de idei mistice!

— Da, o și afirmă singur, în ultima frază din prefață: „Noi nu susținem că matematica idealistă nu are însemnătate din punct de vedere constructiv. Ar fi fost așa de nerod ca și cum am susține că matematica neriguroasă nu ar avea valoare din punct de vedere clasic. Fiecare teoremă dovedită prin metode idealiste este o provocare: să se găsească o versiune constructivă și să i se stabilească o demonstrație constructivă".

— Am văzut că primul capitol este intitulat „Manifestul constructivist". Este oare o punere solemnă în temă?

— Așa se pare. El prezintă aici concepția constructivistă a matematicii, considerînd-o drept acea parte a activității intelectului nostru care premerge biologiei noastre. „Matematica, o creație a minții", spune el, „este mai puțin arbitrară decît biologia sau fizica, creații ale naturii". Ea trebuie să se fi născut dintr-o necesitate interioară. Numărul întreg pozitiv este privit ca element primar al

matematicii şi prin urmare dezvoltarea teoriei întregilor pozitivi, începînd cu noţiunea de unitate, a noţiunii de adăugare a unei unităţi, şi procesul inducţiei matematice sînt produsul direct al inteligenţei noastre. Interesantă îmi pare observaţia autorului cu privire la cele afirmate de Kronecker.

— Povestea că Dumnezeu ar fi creat numerele întregi ?

— Da, însă el mai adaugă : „Kronecker s-ar fi exprimat mai bine dacă ar fi spus : că întregii pozitivi au fost creaţi pentru beneficiul oamenilor (şi ale altor fiinţe finite). Matematica aparţine omului şi nu unor personaje imaginare. Pe noi nu ne interesează proprietăţile întregilor pozitivi care nu au un înţeles pozitiv pentru omul finit. Cînd un om dovedeşte că există un întreg pozitiv, el trebuie să arate cum l-a găsit".

— Aşadar, dacă aritmetica întregilor pozitivi i-a fost oferită omului de propria lui inteligenţă, tot lui îi rămîne să stabilească relaţiile care-l duc de la număr spre crearea celorlalte adevăruri matematice, mai complicate.

— Desigur, şi de aceea el trebuie să caute construcţiile prin care să descopere relaţiile noi dintre mărimile matematice construite anterior. Relaţiile care formează punctul de plecare sînt *ordinea* şi *relaţiile aritmetice dintre întregii pozitivi.* De la acestea se construiesc diverse reguli de împerechere ale întregilor, de separarea lor, de asocierea lor, stabilindu-se astfel noţiunile de mulţime sau de funcţie. Şi acum iată definiţia constructivă a mulţimii : „O mulţime nu este o entitate care are o existenţă ideală. Ea există numai dacă este bine definită. Ca să definim o mulţime îi prescriem, cel puţin implicit, ceea ce trebuie să facem ca să construim un element al mulţimii şi cum putem stabili ca două elemente ale ei să fie egale. Aceeaşi observaţie se aplică şi la definirea unei funcţii ; ca să definim o funcţie printr-o mulţime A pe o mulţime B, se stabileşte un procedeu finit prin care se leagă un element din A de un element din B şi se arată că elemente egale din A determină elemente egale în B. Construind structurile de bază ale matematicii, sistemul numerelor raţionale, sistemul numerelor reale, spaţiile euclidiene, sistemul numerelor complexe, cîmpul numerelor algebrice..., vom găsi cea mai mare parte a matematicii".

— Şi le realizează ?

— În foarte mare măsură, da Păcat că noi nu putem să aprofundăm toate aceste probleme.

— Ba da, dar ne-ar trebui cîteva luni de studiu individual ! Pentru Bădia cred că-i un fleac ; după cîte văd, el a tocit destul din cartea asta !

— Ia lasă aprecierile deoparte. Ţie, dragă Toa, dacă ai să vrei, am să-ţi dau cartea să o frunzăreşti. Eu aş vrea să mă opresc numai puţin la cîteva rînduri din Anexa B, de la sfîrşitul cărţii, care are drept titlu : „Aspecte ale adevărului constructiv", fiindcă atinge problema contradicţiei. Începe aşa : „Rolul contradicţiei în matematica constructivă cere anumite comentarii : după cum s-a observat în capitolul I, există două puncte de vedere posibile. Să presupunem că pentru a dovedi o propoziţie P, am construit un întreg n, despre care ştim că poate avea una dintre valorile finite 1, 2, 3... N. Care dintre aceste N valori va lua, depinde de datele numerice particulare ale propoziţiei P. Pentru condiţiile date, n se calculează printr-un număr finit de operaţii. Ca să dovedim P, sînt de considerat N cazuri : $C_1, C_2 \ldots C_N$, folosind de fiecare dată alt argument n. Să presupunem că unul dintre aceste cazuri, C_m, duce la o contradicţie, adică presupunerea $n = m$ conduce la egalitatea $0 = 1$. Atunci, fie că excludem acest caz, considerînd că el nu se poate întîmpla pentru nici o valoare permisă a datelor numerice sau putem fi mai meticuloşi şi să dovedim că şi în acest caz, propoziţia P este valabilă. Prima posibilitate, adică excluderea cazului C_m, fiindcă duce la contradicţie, pare să ceară o încredere în consistenţa matematicii constructive şi astfel se naşte problema atitudinii constructiviste faţă de problema consistenţei. Pentru constructivist, consistenţa... este o consecinţă a gîndirii corecte. Consistenţa unui sistem formal particular, chiar dacă este dovedită în mod constructiv, nu reprezintă un rezultat foarte interesant pentru un matematician constructivist. Dar fiindcă consistenţa este o consecinţă a gîndirii corecte, inconsistenţa trebuie privită drept o consecinţă a gîndirii necorecte. Matematicianul constructivist, fiind om, nu va fi surprins, dacă unul dintre rezultatele lui duce la o contradicţie. În acest sens, el nu crede în consistenţa matematicii constructive. O inconsistenţă îl va obliga să-şi

examineze gîndirea și să găsească unde a greșit. Pe de altă parte, o demonstrație constructivă care duce la o contradicție este greșită poate prin definiție. În acest sens, el trebuie să creadă în consistența matematicii constructive și de aceea poate exclude, fără nici o ezitare, cazul C_m care l-a dus la contradicție".

— Cele ce mi-ai citit aș vrea să le completez cu o observație, plină de ironie, e drept, pe care a făcut-o Gonseth, cu privire la intuiționiști, cu vreo 30 de ani înainte de a fi scris Bishop această carte, dar care mi se pare cum nu se poate mai potrivită, aici. Uite, o am notată, în caietul meu : „Matematicianul intuiționist încearcă să degajeze, printr-un studiu asupra activității spiritului omenesc, o platformă pentru a-și așeza edificiul său matematic. Dar să notăm, pentru a evita o neînțelegere, că el refuză să descrie pe larg această platformă, pentru că ea nu a găsit, și poate că nu va găsi niciodată, forma sa definitivă". (p. 17). Cu asta cred că am putea încheia discuția noastră asupra constructivismului, nu ?

— Eu cred că nu ! Mi-ar fi plăcut să se fi încheiat cu o apreciere pozitivă și constructivă !

— Ei bine, atunci hai să-i fac gustul nepoțelului meu ! Iată, mă ridic de la masă și merg înspre dulap. Acum, la comandă... „Înseamnă că azi vom avea ceva de furcă ! Îmi pare rău că nu vine și doctorul Ursu"...

— Cum ? Ce înseamnă asta, Bădie ?

— Înregistrarea pe bandă ! Doar nu-i puteam refuza o bucurie aceluia care mi-a făcut și mie cea mai mare bucurie posibilă ! Totodată am vrut să-i arăt prietenului și colegului meu că poate vorbi și cînd e înregistrat.

— Ei, dacă-i așa încaltea hai să ne ascultăm și să vedem ce am fost în stare să vorbim.

VIII

LICURICII DIN ADÎNCURI

Discuția a început-o doctorul Ursu, care a spus : Banda de magnetofon a fost pentru mine o adevărată relaxare și bucurie ; în plus, m-a surprins feciorul meu — căci am ascultat banda acasă împreună — care mi-a sechestrat-o ! Zicea că dorește să o asculte cu niște pricteni de-ai lui, tot ingineri ca și el. A doua surpriză a fost numai a mea cînd *nu am aflat* despre ce vom vorbi astăzi. Mi-am zis că, neașteptîndu-vă la acel final, ați ascultat și dumneavoastră banda și nu ați mai stabilit programul, conform ritualului obișnuit. Venind încoace mi-am amintit astfel de prima noastră întîlnire, cînd tot așa ca și astăzi, nu știam nimic despre problemele de matematici ce urma să le ascult și care, de-atunci, m-au prins într-o capcană din care nu mai doresc să scap.

— Sînt dezolat, stimate doctore, dar trebuie să vă anunț că, deocamdată, capcana s-a deschis, tot așa de neașteptat pentru dumneavoastră ca și atunci cînd s-a închis, căci azi va fi ultima noastră întîlnire. Desigur că peste cîteva luni, dacă veți fi de acord, le vom putea relua, acum însă mi s-a fixat examenul de doctorat și de aceea, cîteva luni, pînă-mi voi redacta teza și voi trece examenul nu-mi mai pot îngădui nici un fel de alte preocupări. Bădia și profesorul meu nu au vrut să asculte sugestia mea, aceea de a continua discuțiile fără mine... Noi am stabilit toate acestea data trecută, precum și subiectul de azi, dar după ce magnetofonul își făcuse datoria ; de aceea, iată a treia surpriză a dumneavoastră. Și așa se zice că „lucrurile bune sînt trei".

— Ultima surpriză nu-mi pare chiar așa de bună. Oricum, vă rog să-mi spuneți programul de azi.

— Programul este „fără program". Fiind o întîlnire, să-i zicem „festivă", fiecare dintre noi are voie să pună întrebările ce-l frămîntă și ceilalți să încerce să dea o mînă de ajutor, ca să le lămurească. Noi am știut asta, dumneavoastră o aflați acum. Sînteți de acord ?

— Cum să nu, sînt foarte bucuros de asta și chiar vreau să profit de ocazie ca să vă cer să-mi vorbiți despre adevărul matematic. Bănuiți desigur că sînt încă sub impresia discuției la care nu am putut lua parte.

— Știm că dumneavoastră erați în stare să puneți mîna-n foc pentru adevărul matematic mai înainte de a vă fi uns noi cu toate unsorile, dar și acum ?

— Nici o unsoare nu ar putea zdruncina convingerea mea, de ordin sentimental, că adevărul pur nu-l pot găsi decît în matematică ! Renașterea nu datorează oare întregul ei avînt faptului că a avut încredere în adevărul matematic ?

— Aveți dreptate, stimate doctore, nu numai dumneavoastră, dar toți marii matematicieni, înțeleg pe acei ce au lăsat o urmă după ei, au fost convinși că au stabilit *adevărul* și probabil că ar fi privit cu multă milă, în ochii aceluia care ar fi încercat să pună la îndoială miezul absolut al adevărului demonstrat de ei.

— Da, Bădie, așa-i ! Descartes a spus limpede că „numai matematicienii au putut găsi cîteva demonstrații, adică raționamente sigure și evidente". Și tot el a observat că „nefiind decît un adevăr în fiecare lucru, cine-l găsește știe atîta cît se poate ști".

— Leibniz considera și el că axiomele sînt consecințe evidente ale definițiilor, de îndată ce înțelegem termenii acestor definiții. Adevărul axiomelor nu încerca nimeni să-l discute fiindcă geometria își trecuse cu bine examenul prin aplicațiile sale în practică : succesele din navigație sau din alte „arte mecanice".

— Dar mai înainte de a aminti de Descartes și Leibniz, nu ar fi trebuit oare să ne oprim la Platon, care considera că matematica este calea prin care poți atinge „adevărul în sine", obiectele de care se ocupă ea avînd o existență proprie în lumea ideilor ? În epoca de glorie a științei grecești, geometria ajunsese la o anumită certitudine empirică, datorită tocmai încrederii de care se bucurau axiomele ei : —

adevăruri clare şi evidente prin ele însele, care *nu au nevoie de nici o demonstrație* !

— Aveți dreptate, stimate profesore, aşa că fiecare alături de simpatia lui: dumneavoastră cu Platon, Bădia cu Leibniz şi eu cu Descartes, să ne îndreptăm împreună înspre începutul secolului al XIX-lea, unde *adevărul absolut* al geometriei euclidiene a căpătat lovitura mortală. Şi de la cine ? De la un tinerel cu numele *János Bolyai* transilvănean de origine, şi de la un rus, pe nume Nicolai Lobacevski. În umbra lor se afla şi marele Gauss, care deşi era de acord cu ei, nu a scos nici un cuvințel ca să-i aprobe sau să-i încurajeze.



János Bolyai

— Da, ei au adus în matematică un nou *adevăr absolut*, acela că *adevărul absolut* nu există ! Geometria neeuclidiană inventată de ei și apoi celelalte geometrii neeuclidiene sînt tot așa de *adevărate* ca și geometria lui Euclid, deşi multe dintre *adevărurile* lor ne par absurde. Ele neagă *adevărul considerat absolut* al axiomei paralelelor, afirmînd, în schimb, că printr-un punct la o dreaptă se pot duce, fie mai multe, chiar o infinitate, de paralele, fie nici o paralelă. Rezultatele obținute, deși erau evident logice nu puteau fi admise atunci, așa cum le admitem noi azi, chiar de cei mai buni dintre matematicieni. În celebra *lecție inaugurală* pe care a ținut-o marele matematician B. Riemann la Universitatea



Nikolai Ivanovici Lobacevski

din Göttingen, în 1854, cu titlul „Asupra ipotezelor care stau la baza geometriei", discutînd despre geometriile neeuclidiene a spus: „rămîne de văzut în ce măsură şi pînă la ce punct aceste ipoteze sînt confirmate de experienţă". Ce avea să se verifice prin experienţă? Dacă suma unghiurilor dintr-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte, cum o afirmă geometria euclidiană sau dacă este mai mică decît două unghiuri drepte, cum rezulta din geometria lui Bolyai-Lobacevski, ori mai mare decît două unghiuri drepte, cum se demonstra în geometria neeuclidiană stabilită de Riemann. Numeroase au fost experienţele ce s-au făcut în această privinţă; chiar şi Gauss le-a făcut.

— Dar cum le-a făcut? Ce fel de triunghi a considerat?

— Un triunghi enorm, cu laturile cît distanţele stelare, fiindcă se punea problema ce fel de geometrie este compatibilă pentru Univers, cu toţii fiind de acord că, în spaţiul nostru limitat, rămîne valabilă geometria euclidiană. V-am spus aceasta ca să arăt că adevărul nou, rezultat odată cu apariţia acestor noi geometrii, *nu trebuia verificat* de experienţă, ci trebuia acceptat ca stabilit prin raţionament! Adică el trebuia să se impună ca un *adevăr matematic*, independent de orice fel de experienţă!

— Da, dar atunci acest lucru nu a fost înţeles, şi de aceea nu se putea accepta că toate trei geometriile *erau*

la fel de adevărate, dar nu *în mod absolut,* ci *relativ* ! Ele depindeau de ipotezele care se aflau la baza uneia sau alteia dintre geometrii.



Bernhard Riemann

— Cît de frumoase sînt cele trei articole ale lui Poincaré despre „Geometriile neeuclidiene", „Spațiul și geometria" și „Experiența și geometria" ! Vorbind despre natura axiomelor spunea : „Axiomele geometrice nu sînt nici judecăți sintetice apriori, nici fapte experimentale. Ele sînt *convenții* ; alegerea noastră, printre toate convențiile posibile, este *îndrumată* de faptele experimentale ; dar ea este *liberă* și nu-i limitată decît de necesitatea de a evita orice contradicție". Mai departe a pus și întrebarea : „Geometria euclidiană este adevărată?" și a răspuns : — „Întrebarea nu are nici un sens ... O geometrie nu poate fi mai adevărată decît alta ; ea poate fi numai *mai comodă*. Or, geometria euclidiană este și va rămîne cea mai comodă". (2, p. 66)

— Desigur, pentru că ea se bazează pe *intuiția geometrică* a spațiului fizic în care trăim noi.

— Vorbiți de *intuiția geometrică,* stimate profesore ? Dar ați uitat că și ea a trebuit să abdice de la locul de cinste pe care-l avea odată, în Antichitate, pînă ce, în sfîrșit, a fost reconsiderată de Brouwer și școala sa ? Spațiile cu *n* dimensiuni, create de Riemann nu se mai bazează pe nici un fel de considerații intuitive. Despre adevărurile

stabilite prin teoremele lor nu mai putem spune că sînt *evidente*, deşi sînt tot aşa de adevărate ca acelea evidente, demonstrate în geometria cu trei dimensiuni.

— Nu te contrazic, ci, din contra, îţi dau apă la moară, invitîndu-te să ne vorbeşti de *curba lui Peano*.

— Adică despre a doua lovitură de graţie dată intuiţiei, din care nici Brouwer n-a mai putut-o salva ? Aţi auzit despre această curbă, dragă doctore ?

— Nu, dar ce-i cu ea ? E mai cu moţ decît celelalte curbe ?

— Şi încă cu ce moţ ! Este o curbă continuă pe care o poţi desena, dar nu-i poţi duce nici o tangentă !

— Cum se poate ? Ştiu bine ce înseamnă o tangentă la o curbă. La cerc mai ţin minte că tangenta este perpendiculară pe rază, la celelalte curbe o duci aşa ca să atingă numai un punct al lor, asta înseamnă că sînt de fapt două puncte infinit apropiate.

— Admirabil, iubite doctore, sînteţi tare pe poziţie, numai că la curba lui Peano, pe care el a găsit-o din 1890, nimeni nu a putut să-i ducă vreo tangentă căci deşi, după cum v-am spus, este continuă, ea umple un pătrat întreg !

— Nu-mi pot imagina deloc cum ar putea arăta, şi mai ales cum s-ar putea desena o curbă care să umple un pătrat ? Asta-i în adevăr o minunăţie demnă de un matematician !

— Atunci nu ne rămîne alta decît să construim! Întîi să desenăm pătratul pe care are să-l umple curba. Îl construim şi îl împărţim în alte patru pătrate egale, ale căror centre la unim cu o linie continuă care să fie mereu paralelă cu laturile pătratului.

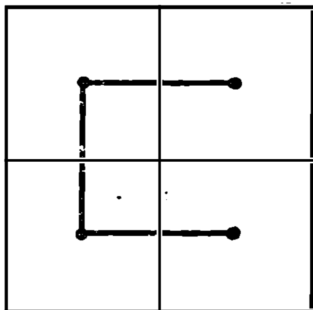


Fig. 3

— Dacă s-a înţeles tehnica, o aplicăm în continuare la fiecare din cele patru pătrate. Se obţin acum 16 pătrate. Le stabilim centrele şi *ducem din nou o curbă* care să unească aceste centre, cu condiţia ca ea *să fie continuă şi ca segmentul care uneşte*

două puncte vecine să rămînă paralel cu una dintre laturile pătratului. După cum vedeți, curba are o înfățișare interesantă.

— Da, și acum am început să ghicesc și eu ce urmează. La rîndul lor, fiecare din cele 16 pătrate trebuie împărțite în cîte patru pătrate. Se obțin acum 64 pătrate, stabilesc centrele fiecăruia dintre ele și le unesc astfel încît curba pe care o duc să-și păstreze însușirile inițiale : să fie continuă și fiecare segment al ei să rămînă paralel cu o latură a pătratului :

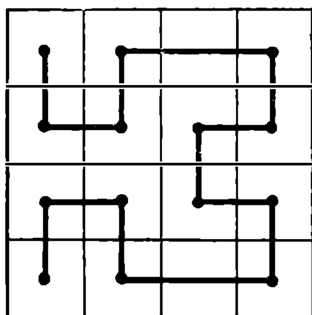


Fig. 4

— Văd că ați înțeles ușor și sper că v-ați convins că nu era chiar „o minunăție" !

— Acuma, după ce mi-ați dezlegat misterul, poate că nu, dar pînă atunci...

— Mai departe, din cele 64 de pătrate se vor desprinde alte 64·4=256 de centre, — puncte prin care va trece o nouă curbă de același fel — apoi altă curbă va uni 256·4=1 024 de puncte și din nou altă curbă continuă se va furișa printre punctele pătratului, căutînd anume numai pe cele 1 024·4=4 096 de puncte care sînt ale ei... și aceasta-i numai începutul, curba urmînd să se învîrtească și să se răsucească mereu mai pe loc...

— Pînă ce veți pierde-o, printre punctele, pătratului fără ca să puteți găsi două puncte „infinit vecine" cum ați spus dumneavoastră, prin care să duceți tangenta la curba lui Peano !

— Cu toate acestea, mă întorc și spun că-i cu adevărat *fantastic* ! Fantastică și curba, dar și mintea omului care a putut născoci această metodă care să-l pună în situația de *a nega tocmai intuiția*, care i-a descoperit geometria !

— Problema aceasta l-a preocupat mult și pe Poincaré. El ajunge la concluzia că „intuiția nu ne poate da rigoarea și nici certitudinea". Ocupîndu-se cu problema tangentei la o curbă continuă, se întreabă și el : „Cum a putut să ne amăgească intuiția pînă într-atîta ?" Și iată ce răspunde :

„Cînd încercăm să ne imaginăm o curbă, noi nu putem să ne-o reprezentăm fără grosime. La fel, cînd ne reprezentăm o dreaptă, o vedem sub înfățișarea unei bande rectilinii de o anumită lățime. Noi știm că aceste linii nu au lățime și încercăm să ni le imaginăm din ce în ce mai subțiri, ca să ne apropiem astfel de limită, dar deși ajungem, într-o oarecare măsură să ne apropiem de ea, nu o vom atinge niciodată. Și atunci e clar că ne putem reprezenta întotdeauna aceste două panglici subțiri, una dreaptă, cealaltă curbă, în așa fel ca ele să se apropie una de alta și să nu se traverseze. Fără o analiză riguroasă vom considera că întotdeauna o curbă are o tangentă".

— De aceea, trebuie să tragem concluzia că există o discrepanță între *adevărul matematic* și *entitățile* la care se referă *acest adevăr*. Elementelor cărora le aparține adevărul matematic, noi le atribuim cel mai mare grad de siguranță, dar unde să găsim, în lumea experiențelor noastre, entitățile care să aibă proprietățile descrise de aceste adevăruri ? De exemplu : știu că două puncte determină o linie dreaptă, dar unde se află, în lumea noastră reală în care trăim, acele *două puncte* și acea *linie dreaptă* pe care le presupune axioma? Platonismul apare astfel ca prima străduință de a rezolva problema, fiindcă postulează existența punctelor și a liniilor geometrice, într-o lume închipuită doar cu mintea, iar cunoștințele noastre de geometrie se bazează pe un fel de reminiscență a noastră despre acea lume a ideilor !

— Iar dacă nu cerem ajutorul lui Platon, înseamnă că trebuie să fim foarte prudenți în privința *adevărului matematic*, ca să nu-l confundăm cu *adevărul intuitiv* ! Ca să fiu mai lămurit, am să aleg încă un exemplu : anume acela despre demonstrarea egalității a două triunghiuri. Cum se procedează, cred că vă mai amintiți și dumneavoastră, stimate doctore.

— Mi se pare că da ; construiesc cele două triunghiuri, care trebuie să fie egale și apoi dovedesc egalitatea, suprapunîndu-le.

— Adevărat ! Sigur că dacă-s egale, ele trebuie să se suprapună. Dar cine-mi garantează că atunci cînd am luat un triunghi și l-am suprapus peste celălalt, în timpul acestei operații, nu s-a întîmplat nimic cu al doilea triunghi ? Orice gospodină poate să se îndoiască de acest adevăr

atunci cînd întinde o foaie de aluat şi-o taie, să admitem, în triunghiuri egale. Punînd mîna pe unul dintre triunghiuri, el se întinde şi nu se va mai suprapune exact peste celălalt. Or, *rigiditatea absolută* a figurilor geometrice nu-i garantată de nici o axiomă în *Elementele* lui Euclid !

— În adevăr, aveţi dreptate şi vă mărturisesc sincer că de abia acum l-am înţeles cu adevărat pe Hilbert ! Ca să nu existe asemenea amăgiri ale intuiţiei geometrice, el şi-a bazat raţionamentele geometrice pe definiţii şi pe axiome precise, din care a hotărît să înlăture orice urmă intuitivă.

— Şi nemaifiind prezentă intuiţia, e de la sine înţeles că în loc de a vorbi de un punct, pot vorbi de o halbă de bere !

— Va să zică, nu se poate afirma că geometria *este adevărată* în mod *absolut*, ci *relativ*, adică ea exprimă adevărurile ce decurg în mod logic din definiţiile şi axiomele pe care ni le-am ales noi singuri. Se potriveşte aici această părere a lui C.P. Steinmetz pe care am găsit-o citată de E.T. Bell (16, p. 10) : „Matematica este ştiinţa cea mai exactă şi concluziile ei sînt susceptibile de a fi demonstrate în mod absolut. Dar aceasta pentru că ea nu încearcă să tragă concluzii absolute. Toate adevărurile matematice sînt relative, condiţionate".

— Cred că nu putem încheia aici discuţia, fiindcă nu am atacat decît un singur aspect al adevărului. Mai sînt şi altele, de pildă nu am căutat să vedem ce părere au intuiţioniştii. În conferinţa lui D. Nelson, din cartea lui Heyting, *Negarea şi separarea conceptelor în sistemele constructive* (28, 208), ni se înfăţişează o altă faţă a adevărului matematic. Iat-o : „Dacă vrem să avem o caracterizare empirică a adevărului trebuie lămurit înţelesul *falsităţii* şi al *negaţiei*. În general o verificare experimentală a unei propoziţii constă dintr-o *operaţie* urmată de *o observare* a unei proprietăţi. Însă, după ce operaţia a fost executată, se pot ivi două cazuri care se exclud reciproc : să se observe proprietatea sau să nu fie observată. În al doilea caz, situaţia se prezintă confuz în ceea ce priveşte adevărul propoziţiei, căci din faptul că proprietatea respectivă nu a fost observată, nu rezultă numaidecît, în mod evident, că propoziţia este falsă, fiindcă s-ar putea ca observatorul

să nu fi fost în stare să constate acea proprietate, deşi ea exista !"

— Bună interpretare, şi sînt cu totul de acord cu ea. Dar, fiindcă a fost vorba de *evidenţă* şi *intuiţie*, n-aţi vrea să ne oprim oleacă asupra acestor două noţiuni ? Simt eu că nu-mi sînt destul de clare şi parcă aş vrea să mi le limpezesc.

— Bine, dragă doctore. În constructivism, *evidenţa* şi *intuiţia* sînt noţiuni de bază.

— De ce numai în constructivism, Nucule? Axioma evidenţei stă şi la temelia teoriei ştiinţelor deductive, formulată de Aristotel, şi sună cam aşa : „Într-o ştiinţă deductivă există un număr finit de termeni al căror înţeles este aşa de evident încît nu cer nici o explicaţie. Cu ajutorul lor se definesc ceilalţi termeni folosiţi. Chiar şi la întrebarea, cum putem ajunge noi, fiinţe omeneşti, la aceste adevăruri evidente, Aristotel a răspuns : „Prin viziunea *intuitivă*, care provine prin inducţie, pe baza percepţiilor !"

— Aveţi dreptate, stimate profesore, şi nu ştiu dacă în afară de acest răspuns s-a mai dat altul. Dacă aş mai insista asupra acestui lucru, cu un exemplu, cred că nu-mi veţi lua în nume de rău! Mi-a venit în minte cazul tranzitivităţii relaţiei $>$. Iată de unde ne vine cunoaşterea acestei tranzitivităţi. Ştim că $a>b$ şi că $b>c$, dar de unde ştim că şi $a>c$? *În mod logic*, această relaţie, $a>c$, *nu se poate stabili*. Din $a>b$ pot afirma numai că a are proprietatea de a fi mai mare decît b şi la fel din $b>c$, însă logica nu-mi spune nimic mai mult. Dar prin intuiţie pot afla mai mult, căci dacă am înaintea mea trei mere de mărimi diferite, şi le aşez după mărime, atunci văd că primul măr, care este mai mare decît al doilea, este totodată mai mare şi decît al treilea, care era mai mic cel de-al doilea măr. Spun că-i *de la sine* evident *că primul măr este mai mare şi decît ultimul măr*, deşi eu nu constatasem decît că-i mai mare decît al doilea măr !

— Să trag deci concluzia că *evidenţa* este o cunoaştere nemijlocită şi ea nu poate fi stabilită altfel ? Iar *intuiţia* ar fi procesul prin care se ajunge la evidenţă ?

— Cel puţin aşa cred.

— Atunci mă întorc şi întreb : dacă evidenţa este acea calitate a cunoaşterii care exclude calitatea de dubiu şi

de eroare, de ce mi s-a părut evident că se poate duce întotdeauna o tangentă la o curbă continuă ?

— Nu sînteţi numai dumneavoastră păgubaşul. Pentru toţi marii matematicieni din secolele trecute era aşa de *evident* postulatul paralelelor, adică faptul că printr-un punct la o dreaptă nu se poate duce decît o singură paralelă, încît au refuzat să accepte altă geometrie decît cea a lui Euclid !

— Bine, dar atunci ce-i de făcut ?

— Ceea ce au făcut, de pildă, formaliştii, cu Hilbert în frunte : să se asigure de necontradicţia care ar putea decurge dintr-un adevăr — mai bine i-am spune axiomă — pe care ar crede-o evidentă.

— Aveţi dreptate. Aşa a procedat Hilbert cînd a introdus *metoda axiomatică*. El s-a străduit să demonstreze că sistemul axiomatic construit de el este necontradictoriu.

— Numai că aici s-a cam împotmolit. G. Gentzen spunea : „orice demonstraţie a necontradicţiei presupune o metodă care este ea însăşi nedemonstrabilă".

— Drept ce vă spun, matematicienii sînt oamenii cei mai fascinanţi din lume. Fantastic de fascinanţi, căci afirmaţi mereu că *nu sînteţi siguri pe nimic*, că *nu ştiţi nimic* şi cu toate acestea stabiliţi totul şi nimic nu se petrece în lumea asta, de la rachetele interplanetare şi pînă la microscopul electronic, care să nu aibă pecetea matematicianului !

— Asta-i altceva, dar dumneavoastră nu ne-aţi întrebat nici de rachete, nici de microscopul electronic, ci despre adevărul matematic, iar la această întrebare nimeni nu vă poate răspunde ! Iată, zilele trecute am primit ultimul număr dintr-o nouă revistă matematică, intitulată „The Mathematical Intelligencer" şi cuprinde un articol, scris parcă anume pentru întîlnirea noastră de azi. Autorul este E. Snapper şi articolul se cheamă „Teoremele matematice sînt analitice sau sintetice ?" (30). În el este vorba despre *adevărul matematic* şi totodată, discutînd această problemă se trec în revistă multe dintre subiectele ce ne-au preocupat pe noi. Ni le vom reaminti şi astfel vom avea, poate, o imagine mai limpede asupra lor. Deşi am vorbit şi noi despre propoziţii analitice şi sintetice, am să repet pe scurt ce spune autorul :



Immanuel Kant

În *Critica rațiunii pure*, Kant face deosebirea dintre propozițiile analitice și cele sintetice. El numește o *propoziție analitică* aceea a cărui adevăr depinde numai de definiția simbolurilor ce intervin în ea. O propoziție analitică *nu ne informează*, și prin definiție *este adevărată*. *Propozițiile sintetice* pot fi *adevărate* sau *false*. O propoziție este sintetică dacă adevărul sau falsitatea ei nu depinde numai de definiția simbolurilor pe care le cuprinde, ci și de experiență, de intuiție sau de amîndouă. De aceea, ea este *informativă*. După ce sînt date aceste lămuriri, autorul arată că din răspunsurile la întrebarea pusă în titlu se desprind *diferitele păreri despre adevărul matematic*. Am să enumăr pe cele mai multe dintre ele, în ordinea în care se găsesc :

Răspunsul lui Kant : Teoremele matematice ne dau informații despre definiția simbolurilor ce apar în ele, de aceea sînt *sintetice*. Kant afirmă că siguranța absolută a adevărului propozițiilor matematice vine de la faptul că aceste adevăruri sînt complet independente de experiență ; ele sînt *apriori* și *intuitive*. În cazul propozițiilor sintetice obișnuite intervine experiența, dar în cazul celor matematice intervine intuiția pe care fiecare ființă omenească o are înlăuntrul ei, anume *intuiția timpului* și *intuiția spațiului*. Dacă adevărul unei propoziții depinde de una dintre

aceste două intuiţii, asta înseamnă că adevărul ei nu depinde numai de definiţia simbolurilor ce le cuprinde, ci şi de intuiţie; or, aceasta face propoziția *sintetică* și deci *informativă*. Pentru Kant, noțiunile noastre despre numerele naturale 1, 2, 3... derivă din *intuiția noastră despre timp*, şi adevărul teoremelor privind aceste numere, adică teoremele aritmeticii, depind de această intuiţie. *Intuiția timpului* este cauza care face ca teoremele aritmetice să fie *sintetice* şi totodată *apriori*, după cum *intuiția spațială* face ca teoremele geometriei să fie *sintetice* și totodată *apriori*.

— Bine, dar şi propoziţiile analitice sînt prin definiție *adevărate* şi totodată *apriori*, căci ele nu depind de experiență. De ce le-a evitat Kant ?

— Pentru că ele nu sînt *informative*, și ... pentru că aceasta a fost părerea lui Kant. Urmează acum părerea opusă, *în răspunsul lui Frege* : Frege consideră că numerele întregi : 0, 1, 2,... se bazează numai pe logică. Nu-i vorba de *logica matematică*, ci de aceea care are înțelesul larg de „raţionament independent de orice experiență și intuiţie". Frege a definit pentru prima oară *numărul cardinal* prin clasa mulţimilor la fel de numeroase. El a arătat cum se poate baza întreaga aritmetică pe logică și a susținut, contrar lui Kant, că teoremele aritmeticii se bazează numai pe logică şi nu depind de experiență şi intuiţie, de aceea *sînt analitice*. Desigur că şi Frege recunoaşte că teoremele aritmeticii *sînt informative*, dar afirmă că aceasta se datoreşte modului cum sînt folosite *definițiile noțiunilor de bază ce apar* în teoreme.

— Dar cum s-a descurcat Frege cu propoziţiile de geometrie ?

— În privinţa geometriei, Frege împărtăşea vederile lui Kant, adică admitea intuiţia spațială. Dar, aceste probleme nu le-a dezvoltat, fiindcă după ce trăsnetul antinomiilor a căzut din senin, el a părăsit matematica !

Răspunsul lui Russell : A fost de aceeaşi părere cu Frege, dar, mai cutezător, el a considerat că în *Principia Mathematica* a putut dovedi că *întreaga matematică* se bazează pe logică. Astfel, el a pus bazele şcolii logicistice, care susţine că toate teoremele matematice sînt analitice.

— Aici s-ar putea spune multe. După cum știm prea bine, Russell și Whitehead au încorporat în *Principia Mathematica* și întreaga teorie a mulțimilor; or, această teorie nu poate fi derivată numai din principiile logice, ci au trebuit introduse și unele axiome ce nu aparțin logicii.

— Fiindcă sînt multe de spus, iată, de pildă, ce scrie A. Lautmann:

„Dezvoltarea noțiunii de tautologie a eliminat complet, în școala lui Russell, ideea unei realități proprii matematicii. Pentru Wittgenstein și Carnap, matematica nu este decît un limbaj indiferent la conținutul ce-l exprimă... matematica nu ar fi decît un sistem de transformări formale care permite să lege între ele datele fizicii. Dacă am încerca să înțelegem rațiunea acestei dispariții progresive a realității matematicii, ajungem la concluzia că ea rezultă din folosirea metodei deductive. Vrînd să se construiască toate noțiunile matematice, pornind de la un mic număr de noțiuni și de proprietăți logice primitive, se pierde din vedere caracterul calitativ și integral al teoriilor constituite. Or, ceea ce filosoful speră să afle în matematică este un adevăr care s-ar revela din armonia edificiului ei, și în acest domeniu, ca și în multe altele, cercetarea noțiunilor primitive ar trebui să cedeze locul unui studiu sintetic de ansamblu". (20, p. 23). Dar asta-i altă chestiune. Hai să vedem ce mai zice mister Snapper.

— Urmează *răspunsul intuiționiștilor*: Intuiționiștii consideră că matematica se bazează pe construcții mintale. Ca și Kant, ei consideră că numerele naturale: 1, 2, 3... sînt construcții mintale bazate pe intuiția timpului și în acestea se află de fapt activitatea principală din care derivă întreaga matematică. De aceea, ei nu mai au nevoie de o altă intuiție, ca aceea a spațiului, ca să construiască celelalte ramuri ale matematicii. În această privință, părerile lor diferă de acelea ale lui Kant. Dar, fiindcă pentru intuiționist o teoremă matematică înseamnă afirmația că este posibilă o anumită construcție mintală, rezultă că referindu-ne la Kant și acceptînd-o ca pe o experiență, ei consideră teoremele matematice ca propoziții sintetice.

Răspunsul lui Poincaré: Și Poincaré admite că teoremele matematice sînt sintetice, dar din altă pricină, anume

fiindcă ele se bazează pe inducția matematică. Poincaré a fost un precursor ai intuiționismului în sensul că el considera inducția matematică drept arhetipul raționamentului matematic. Cam acestea sînt părerile pe care le citează autorul, el însuși declarîndu-se intuiționist.

— Atunci, hai să mai adaug și eu *un răspuns, al lui Goethe* :

— Interesant de tot, de unde l-ai cules ?

— Ei, acesta-i secretul meu ! Adevărul este că nu mai știu unde l-am citit, dar cînd l-am găsit, mi-a plăcut așa de mult că nu l-am mai uitat. Iată cum sună : „Matematica are reputația că ar duce la concluzii infailibile. Aceasta însă este pe de-a-ntregul fals, căci infailibilitatea ei nu-i decît identitate. De *două ori doi* nu este patru, ci este exact *de două ori doi*, căci aceasta este ceea ce noi numim, *mai pe scurt*, patru ! Dar patru nu înseamnă ceva nou. Și această comportare apare mereu și mereu în concluziile sale, cu excepția formulelor mai complicate în care identitatea este mai greu de observat".

— După cîte văd, ai adăugat și acest răspuns numai ca să tragă și mai greu în cumpănă faptul că nu se poate trage nici o concluzie definitivă cu privire la natura adevărului matematic !

— Una, și încă definitivă, nu, dar mai multe, da. Iată una surprinzătoare : Am vorbit data trecută de cartea lui Bishop, tipărită în 1967, carte cu un deosebit răsunet în lumea intuiționistă. Și, iată ce scrie Bourbaki în *Istoria matematicii*, apărută în a doua ediție, revăzută și adăugită, în anul 1969. Am să citesc exact, ca să nu fiu acuzat de vreo exagerare sau interpretare greșită : „Nu-i nici o îndoială că viguroasele atacuri venite din partea intuiționiștilor nu au forțat nici școlile matematice de avangardă și nici chiar pe partizanii matematicii tradiționaliste să se apere... Școala intuiționistă, a cărei amintire nu este destinată să rămînă decît ca un titlu de curiozitate istorică, a adus cel puțin serviciul de a fi obligat pe adversari, adică imensa majoritate a matematicienilor, să-și precizeze poziția lor și să devină mai conștienți de rațiunea (a unora de ordin logic, a altora de ordin sentimental) încrederii lor în matematică". (31, p. 56)

— Nu se poate să se fi scris asemenea rînduri : Cum ai spus : „amintire" și „Un titlu de curiozitate istorică ?" E prea mult ! Chiar pentru un „om de pe stradă" ca mine ! Surprinzătoare concluzie, n-am ce zice !

— Şi totuși, cartea stă mărturie în fața dumneavoastră. După cum bine știți, N. Bourbaki *nu-i oricine* și nici măcar *un singur om* ! Este o grupare a unora dintre matematicienii străluciți din Paris.

— În definitiv, o părere cam asemănătoare o exprima, cu ani în urmă, și Poincaré, referindu-se la logiciști. Nu mi-e greu să găsesc citatul cu pricina. După ce critică anumite interpretări spune : „Orice ar fi, logistica trebuie să fie refăcută și nu se știe prea bine ce se va putea salva... adevărata matematică, aceea care folosește la ceva, va putea să continue să se dezvolte după principiile ei proprii, fără ca să se preocupe de furtunile care fac ravagii în afara ei și să-și urmeze, pas cu pas, cuceririle obișnuite care sînt definitive și niciodată de părăsit". (5, p. 206)

— În strașnică fundătură am ajuns ! Pe de o parte Bourbaki nu cunoaște sau nu apreciază strădaniile intuiționiștilor, pe de altă parte Poincaré nu-i de acord cu părerile logiciștilor, și, după cum am văzut, acestea nu-s singurele neînțelegeri !

— Desigur că nu ! Singura speranță de a găsi o cale de ieșire o zăresc în primul dintre cele trei volume pe care le ai mata, Bădie, în bibliotecă, intitulate : *Matematica conținutul, metodele și importanța ei,* carte care a fost compusă de un colectiv dintre cei mai de seamă matematicieni sovietici, bazîndu-se pe principiile materialismului dialectic, așa cum au fost expuse de Engels și Lenin (32).

— Îmi amintesc și eu că, atunci cînd am citit *Anti-Dühring,* m-a uimit cu cîtă pricepere discuta Engels probleme de matematici. Era totuși matematician ?

— Nu, dragă doctore. În capitolul I, scris de către binecunoscutul matematician A.D. Alexandrov, din care am de gînd să vă citesc, intitulat „Privire generală asupra matematicii", autorul răspunde la întrebarea dumneavoastră, astfel : „Fără a fi el însuși matematician, Engels a dat o analiză atît de adîncă fundamentelor acestei științe, nu numai pentru că a fost un gînditor genial, ci — și aceasta este un element principal — și pentru că stăpînea materia-

lismul dialectic şi se călăuzea după el în problema stabilirii esenţei matematicii. Nu trebuie să ne mire, de aceea, că pînă la Engels nimeni nu a fost în stare să dea acestei probleme o soluţie atît de profundă şi de corectă. Nici cei mai mari matematicieni nu au reuşit să o rezolve cu atîta amploare". (32, p. 91)

— Foarte interesant ! Era deci îndreptăţit să mă minunez şi eu, un profan în matematici !

— Desigur. Acum am să ilustrez cele de mai sus, printr-un citat din Engels, pe care-l menţionează Alexandrov, la pagina 81, din acest capitol : „În matematica pură, intelectul nu se ocupă în nici un caz numai cu propriile sale creaţii şi imaginaţii. Noţiunea de număr şi de figură sînt luate din lumea reală şi nu de altundeva. Cele zece degete cu ajutorul cărora oamenii au învăţat să numere... sînt orice vreţi, numai nu o creaţie independentă a intelectului. Pentru a număra e nevoie nu numai de obiectele care se pot număra, dar şi de capacitatea de a face abstracţie, în considerarea acestor obiecte de toate celelalte însuşiri ale lor în afară de număr, iar această capacitate este rezultatul unei îndelungate dezvoltări istorice bazate pe experienţă. Ca şi noţiunea de număr, şi noţiunea de figură este luată exclusiv din lumea exterioară, şi nu s-a născut în cap din gîndirea pură ...

Matematica pură are drept obiect formele spaţiale şi raporturile cantitative ale lumii reale, adică un material foarte real. Faptul că acest material apare într-o formă extrem de abstractă nu poate ascunde decît superficial provenienţa din lumea exterioară ... Dar, ca în toate domeniile gîndirii, pe o anume treaptă de dezvoltare, legile abstrase din lumea reală sînt despărţite de lumea reală şi îi sînt opuse ca ceva de sine stătător, ca nişte legi venind dinafară, cărora lumea trebuie să li se conformeze". (32, p. 81) Pornind de la faptul că Engels subliniază că matematica reflectă realitatea, Alexandrov trage mai departe concluzia : „Posibilitatea de a considera în mod abstract obiectul matematicii are un fundament obiectiv în însuşi acest obiect. Formele, relaţiile, conexiunile şi legile generale, independente de particularităţile calitative sau de conţinutul concret pe care le reflectă matematica, există în mod obiectiv, independent de conştiinţa noastră... Acolo

unde nu există astfel de forme și relații generale, indiferente față de conținut, nu este posibilă nici o considerare matematică". Acum, vă rog, atenție mărită, căci iată ce spune Alexandrov: „Caracterul obligatoriu al concluziilor speculative ale matematicii a putut duce la părerea greșită că matematica și-ar avea fundamentul în gîndirea pură, că ar fi apriorică, că nu ar proveni din experiență, că nu ar reflecta realitatea. La concepții de acest fel a ajuns, bunăoară, celebrul filosof german Kant. Această concepție idealistă, profund greșită, se datorește între altele, faptului că matematica nu este privită de unii în apariția ei și în dezvoltarea ei reală, ci oarecum de-a gata. Această tratare este însă total neîntemeiată, pentru simplu motiv că nu este în concordanță cu starea reală a lucrurilor. Este un fapt bine stabilit că matematica nu este apriorică, ci a apărut din experiență". (32, p. 85) Tot așa de interesante sînt și următoarele observații ale lui Alexandrov: „Matematica a suferit întotdeauna, și mai suferă încă, o influență considerabilă din partea ideologiei. La fel ca în orice știință, conținutul obiectiv al matematicii este înțeles și interpretat de matematicieni și filosofi în cadrul unei anumite ideologii... Lupta materialismului, care corespunde conținutului obiectiv al științei, împotriva idealismului care contrazice acest conținut și denaturează înțelegerea lui, se manifestă în toată istoria matematicii. Această luptă este clar conturată încă în vechea Grecie... Odată cu dezvoltarea capitalismului în Europa, concepțiile materialiste, care au reflectat ideologia înaintată a burgheziei în ascensiune din perioada secolului al XVI-lea — începutul secolului al XIX-lea, au început să cedeze locul concepțiilor idealiste". Și acum, te rog, în special, pe mata, Bădie, să iei aminte la cele ce urmează: „Poincaré, marele matematician francez de la sfîrșitul secolului al XIX-lea și începutul secolului XX, a emis concepția idealistă a „convenționalismului", după care matematica este o schemă de convenții, adoptate pentru comoditatea descrierii varietății de date ale experienței. Astfel, după opinia lui Poincaré, axiomele geometriei euclidiene nu sînt decît convenții, iar importanța lor este determinată de comoditate și de simplitate, nu de concordanța lor cu realitatea". (1, c.p. 99) Ce spui, Bădie, îți place ?

— Cunosc bine această părere şi m-am gîndit de multe ori la ea. Dar dacă ai să treci mai departe, ai să constaţi că Alexandrov pune această chestiune într-un mod foarte cumpănit şi, aş putea adăuga, chiar cavaleresc. Dă-mi te rog mie cartea, ca să-ţi citesc şi eu acest pasaj ! Iată-l : „În condiţiile capitalismului însă, convenţionalismul, intuiţionismul, formalismul şi alte curente asemănătoare se menţin şi chiar se completează cu noi variante ale concepţiilor idealiste asupra matematicii... Astfel, dificultăţile din dezvoltarea matematicii au generat, în condiţiile capitalismului, o criză ideologică a acestei ştiinţe, analoagă în fundamentele ei cu criza fizicii a cărei esenţă a fost stabilită de Lenin în geniala sa operă *Materialism şi empiriocriticism*. Această criză nu înseamnă cîtuşi de puţin că, în ţările capitaliste, matematica ar fi cu totul înfrîntă în dezvoltarea ei. O seamă de savanţi, care se situează pe poziţii vădit idealiste, obţin rezultate importante, uneori cu totul remarcabile, în rezolvarea unor probleme matematice concrete şi în dezvoltarea noilor teorii. Este suficient să ne referim la strălucita elaborare a logicii matematice".

— Atunci, Bădie, mi se pare că ar fi nimerit ca acestor ample şi importante observaţii ale lui Alexandrov să le urmeze concluzia pe care am găsit-o în discursul de inaugurare a *Discuţiilor* de la Zürich asupra fundamentelor matematicii : „Ca să caracterizez domeniul şi obiectul acestor discuţii, am să folosesc o imagine a matematicianului Gonseth... La fel, spune el, cum există podişuri în care apele se împart ca să coboare către oceane diferite, terenul acestor dezbateri ocupă o poziţie centrală, şi, după răspunsurile pe care le vom da la problemele puse, cursurile gîndurilor noastre vor putea coborî către universuri intelectuale opuse". (9, p. 10)

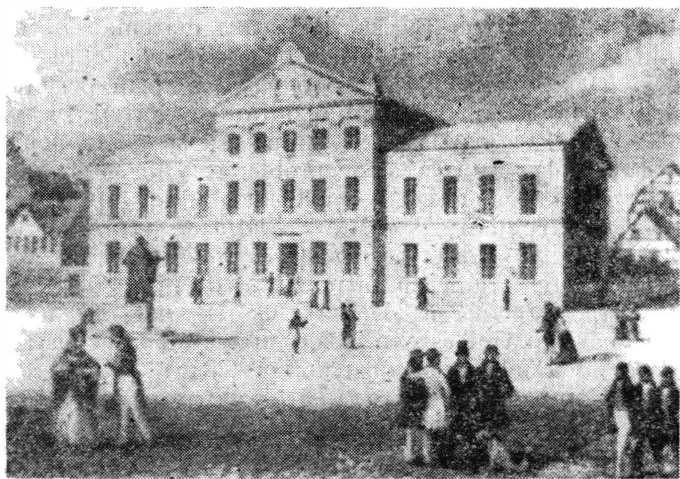
— Cu adevărat, frumoasă şi chibzuită concluzie, deşi eu voi continua să cred, în adîncul sufletului meu, într-un singur şi inefabil adevăr matematic. De aceea, adesea mă întreb, şi vă întreb şi pe dumneavoastră acum, prin ce se deosebeşte această *activitate matematică* de celelalte activităţi ale minţii, în ce constă puterea de fascinaţie plămădită în ea, încît şi cei ce nu şi-o pot apropia, să o admire sau să se teamă de ea şi, uneori, să viseze că ar putea-o înţelege ?

— Greu de stabilit acest diagnostic, dragă doctore. Nici în domeniul dumneavoastră nu-i chiar așa de ușor de pus un diagnostic, totuși aveți unele criterii, anumite norme după care puteți trage concluziile potrivite, dar în cazul acesta, tare mă tem că nici un matematician consacrat, cum ar fi Gauss, Cantor, Poincaré, Hilbert, Brouwer, ca să amintesc numai cîteva dintre numele mai des pronunțate de noi, nu s-a întrebat și de aceea nu a dat vreun răspuns la întrebarea: „ce l-a făcut să prefere matematica altei științe, pentru care ar fi avut de asemenea aptitudini și ar fi putut să-l intereseze? Deși Gauss, Poincaré sau Hilbert au cochetat și cu fizica, ori cu astronomia, matematica a însemnat preocuparea lor statornică".

— Problema se poate totuși discuta, numai că înainte de a o ataca, să observăm că însuși înțelesul termenului *activitate matematică* nu-i același pentru toți matematicienii. Unii consideră matematica drept o știință deductivă și astfel activitatea lor, oricît ar fi ea de importantă și chiar genială, se reduce la o transformare logică a unor anumite propoziții admise ca adevărate, fie din domeniul aritmeticii, al geometriei, al analizei ș.a.m.d. Pentru alți matematicieni, activitatea matematică nu se reduce la un simplu joc al spiritului; ei o privesc condiționată nu numai de necesități interne ci, mai ales, de problemele concrete puse de viața din jurul nostru, adică de natură, de tehnică sau de diferite alte științe.

— Iată cam același lucru, spus de Brouwer, dar în ce formă? Cred că veți fi tot așa de mirați ca și mine, cînd vă voi citi o parte din discursul final pe care l-a pronunțat el, în calitate de președinte al Academiei internaționale de filosofie a științelor, în 1950, cînd a prezidat Colocviul internațional de logică matematică, ținut la Paris. Mai mult nu vă spun ca să nu stric efectul pe care-l presupun! „Programul colocviului dîndu-mi cinstea de a spune cîteva cuvinte, drept concluzie, aș vrea să vă propun să considerăm pentru o clipă împreună matematica și logica, cele două științe așa de intim legate, care ne-au preocupat. De aceea, să coborîm în adîncul conștiinței noastre și să constatăm că la origine nu există acolo decît o lume-vis și și că în această lume-vis nu ia naștere o lume pragmatică decît prin mijlocirea *fenomenului de discernămînt*, prin care

se creează *omul gînditor* şi a *fenomenului de ingeniozitate*, prin care se creează omul activ, asamblarea acestor două fenomene dînd naştere lumii exterioare şi obiectelor. Apoi, numind *joc* orice activitate îndeplinită pentru ea însăşi şi nu provocată de frică, constrîngerea dorinţă sau vocaţie, să relevăm *existenţa jocului* logic, care înlocuieşte, prin discernămînt, obiectele percepute cu obiecte fictive şi pur indicative, şi a *jocului matematic*, care face, prin discernămînt, completă abstracţie de obiecte. Să remarcăm că aceste două jocuri pornesc şi unul şi celălalt de la un *fenomen prim de bi-unicitate* capabil de o pluralizare spontană şi infinită care creează în cîmpul spiritului o vegetaţie nelimitată şi exuberantă, cu mult mai bogată în cazul matematic decît în cazul logic, din cauza eliberării totale de povara obiectelor cu care se joacă matematica. Cele două jocuri, prin originea lor, se influenţează reciproc. Prin natura lor, ele nu ar trebui să se amestece în viaţa socială. Dar aceasta, avînd nevoie de jocuri, ele suferă influenţa ştiinţelor pragmatice, cooperînd, contra naturii lor, la transformările vieţii sociale, care se numeşte progres". (25, p. 75)



Universitatea din Göttingen

— Ai scontat bine. Nu-mi vine să cred că Brouwer al nostru, care mai că s-a luat de piept cu Hilbert cînd și-a susținut tezele intuiționiste atunci la Göttingen, a putut să afirme asemenea păreri legate de activitatea matematică !

— Știi că acuma mi-a devenit mult mai simpatic !

— Dar să nu uităm că discuția aceea de la Göttingen a avut loc prin 1926—1927 și discursul acesta a fost pronunțat după vreo 24 de ani, timp în care și Brouwer a mai îmbătrînit !

— Ia să vedem cîți ani avea ? 1950—1881=69 de ani ! Da, la această vîrstă simți nevoia să pătrunzi *în adîncul conștiinței* ! Chiar făcînd și unele concesii intuiționismului !

— Cînd am spus că *activitatea matematică* ar putea fi discutată mai îndeaproape, m-am gîndit la răspunsul pe care l-a dat Beth, în unul dintre paragrafele de încheiere ale cărților sale, adesea folosite de noi, paragraf intitulat „Elemente ale activității matematice". (7, p. 201 și 21, p. 635) De acele fragmente am să mă folosesc îndeaproape ca să vă arăt cum privește el această problemă. Mai întîi, consideră că în activitatea matematică un rol esențial îl are *elementul constructiv*, ori de cîte ori apare necesară invenția ca mijloc de rezolvare a unor probleme concrete. Totodată, în dezvoltarea sistematică a matematicii ca domeniu științific, mai sînt necesare și alte elemente ca, de pildă, *elementul lingvistic* sau *limbajul*. Acesta permite fixarea, stocarea și transferul rezultatelor activității matematice astfel ca rezultatele obținute să se poată acumula și să ajute la tratarea altor probleme. Din interacțiunea acestor două elemente (cel constructiv și cel lingvistic) rezultă, în particular, dezvoltarea *metodei deductive,* adică *logica,* precum și diferite *sisteme de notație*. Și aceste noi elemente interacționează între ele și drept rezultat apare *dezvoltarea deductivă a logicii însăși* și apoi *formalizarea*. Faptul că limbajul este supus unui tratament constructiv implică două feluri de construcții. Alături de *construcțiile matematice* apar și *construcțiile lingvistice*: „nu se construiesc numai drepte și cercuri, ci se construiesc, totodată și demonstrații". Dar din aceeași interacțiune rezultă și introducerea sistemelor de notații care trebuie să completeze și chiar să înlocuiască *limbajul natural* ce nu mai satisface nevoile create prin dezvoltarea metodei deductive. Mul-

ţimea acestor elemente determină *structura matematică*. Alături de structură, *activitatea matematică* are încă şi un *conţinut* sau un *obiect*. *Structura matematică* derivă din lucrarea pe care o desăvîrşeşte matematicianul asupra acestui obiect şi de aceea trebuie să ne aşteptăm la faptul că *din considerarea obiectului activităţii matematice* să rezulte *noi elemente caracteristice* ale acestei activităţi.

— Înainte de a trece la obiectul activităţii matematice, aş vrea să ne oprim ca să discutăm despre *structura matematică*. Noţiunea este foarte la modă şi nu numai în matematici întîlneşti cuvîntul *structură* şi *structuralism*, ci în multe alte domenii, ca de pildă în filosofie Eu am citit, nu de mult, şi am în biblioteca mea două cărţi deosebit de interesante, una a academicianului profesor C.I. Gulian, *Marxism şi structuralism*, iar alta a prea bine cunoscutului filosof francez Claude Levi-Strauss, *Antropologia structurală*. Îmi pare rău că n-am ştiut că s-ar putea să ajungem la ele, că le-aş fi adus cu mine. V-aş fi citit cîteva rînduri care...



Constantin I. Gulian

— Să nu vă pară deloc rău, dragă doctore, am şi eu aceste cărţi, aşa că am să vi le pun la îndemînă.

— Bine, iar pînă atunci să stabilim originea cuvîntului. În latineşte *structura* înseamnă *alcătuire, compoziţie*, iar în matematici sensul lui s-a păstrat, bineînţeles cu completă-

rile specifice domeniului la care se referă. Avem de-a face, de pildă, cu *structuri algebrice*, cu *structuri geometrice*, cu *structuri topologice* ş.a. Bourbaki afirmă că noţiunea modernă de structură a fost pe deplin însuşită către 1900, dar că i-a mai trebuit vreo 30 de ani de aclimatizare pînă să apară în plină lumină. La această observaţie mai adaugă şi pe aceea că matematicienilor le-a venit destul de greu să se elibereze de impresia că obiectele matematice sînt date cu o structură a lor şi că abia după ce au realizat această disociere, adică au stabilit că un acelaşi obiect matematic poate avea mai multe structuri, s-a putut trece la definiţia generală a structurilor. Numai că n-a dat-o în acel paragraf pe care l-am citit eu. (31, p. 34)

— Însă, eu ştiu, dragă profesore, că, de fapt, cercetările asupra structurilor algebrice au început mai înainte, înspre sfîrşitul veacului al XIX-lea, adică îndată după ce a fost cunoscută şi difuzată teoria grupurilor a lui Galois. Astfel, în Statele Unite ale Americii, *Benjamin Peirce* s-a ocupat de algebrele liniare, acestea putînd fi considerate ca primele cercetări asupra structurilor algebrice de dimensiune finită. E însă adevărat că atunci lucrările lui nu au fost înţelese, ba au şi fost aspru criticate şi că de-abia din secolul al XX-lea obiectul principal al algebrei nu a mai fost *teoria ecuaţiilor*, ci *teoria structurilor algebrice* !

— Şi în geometrie, deosebirea introdusă de Poncelet între *proprietăţile proiective* şi *proprietăţile metrice*, care înseamnă prima interpretare structurală din geometrie, s-a făcut tot la sfîrşitul secolului al XIX-lea. Iar *Programul de la Erlangen* nu a fost scris în 1872 ? Or, el este *tipul sintezei structurale a geometriei* !

— Aveţi perfectă dreptate, stimate profesore. Demonstrînd că fiecare ramură a geometriei se caracterizează printr-un grup propriu, el a stabilit o clasificare structurală a teoremelor din geometrie, tot înainte de 1900 !

— Numai oleacă v-am lăsat singuri şi aţi luat-o amîndoi razna ! Mă uit cu jale, cu cîtă răbdare vă lasă-n pace iubitul nostru doctor. Poftim cărţile !

— Mulţumesc pentru ele şi pentru intervenţie, căci chestia cu grupurile era pentru mine cam păsărească !

— Iar vă cer iertare ! Am luat-o razna fiindcă eu am impresia că toată lumea ştie ce este un *grup*.

— Cum să nu? Ştiu ce este un *grup* de oameni care s-au vindecat şi părăsesc spitalul, sau *un alt grup* care vine să-i ia locul, dar nu cred că acelaşi lucru este şi la *grupul* pe care-l are în vedere *teoria grupurilor* !

— Nu, un *grup* este pentru noi tot *o mulţime*, finită sau chiar infinită, dar care satisface anumite condiţii anume :

1. Există o lege de compoziţie, adică *de structură* care depinde de natura elementelor şi de o anumită convenţie astfel că la fiecare două elemente a şi b din mulţime, ori de cîte ori se aplică acea lege de compoziţie le corespunde un alt element c din aceiaşi mulţime. Dacă notăm această lege simbolic cu un semn, de pildă &, şi luăm elementele a, b în ordinea aceasta *şi nu alta*, putem scrie $(a\&b)=c$. Cînd intervin trei sau mai multe elemente, legea este asociativă, adică $(a\&b)\&c=a\&(b\&c)$. Paranteza are rolul doar să arate că operaţia a fost efectuată şi nimic altceva.

2. Există un *element neutru* al grupului, numit şi unitate, pe care îl voi nota cu litera „*e*“ astfel că, pentru orice element din mulţime să existe relaţia : $(a\&e)=(e\&a)=a$.

3. Fiecare element a din mulţime admite *elementul invers*, numit şi *simetric* : a^{-1}, astfel că $(a\&a^{-1})=(a^{-1}\&a)=e$.

— Aşadar, grupul dumneavoastră este cu totul altceva decît grupul meu de oameni ! Ia să vedem, mulţimea numerelor naturale formează un grup, dacă iau ca lege de compoziţie, să zicem *adunarea* ? Trec peste prima condiţie care-i îndeplinită, căci $3+4=7$ şi $(3+4)+7=3+(4+7)$. Dar elementul neutru ? Ar trebui să fie zero căci $3+0=0+3=3$ şi pe aceasta nu-l am ! Aşadar, mulţimea numerelor naturale nu formează un grup. Începe să-mi placă ! E o noţiune destul de pretenţioasă, grupul dumneavoastră ! Atunci să consider mulţimea întregilor ! Îl am pe zero, dar în schimb nu am numerele inverse, care ar trebui să fie cele negative ! Straşnic ! Pot deci afirma că numai mulţimea numerelor întregi pozitive şi negative formează un grup faţă de adunare ?

— Da, de aceea această mulţime se numeşte *grup aditiv* şi totodată *comutativ* !

— Asta pentru că $2+3=3+2$? Cred că era de la sine înţeles !

— Exact, în acest caz, dar nu este întotdeauna *de la sine înțeles* ! Dacă operația ar fi fost *scăderea*, comutativitatea s-ar mai fi păstrat ?

— Nu, căci $2-3=-1$ și $3-2=1$. Dar cred că în acest caz nici proprietatea de grup nu mai există, fiindcă nici asociativitatea nu-i verificată: $(2-3)-7=-8$ și $2-(3-7)=$ $=2+4=6$!

— Atunci, spuneți-mi, vă rog, dacă am lua ca lege de compoziție înmulțirea, mulțimea numerelor întregi formează un grup multiplicativ ?

— Nu mă iertați deloc ! Văd că toți mă atacați cu înverșunare, parcă v-aș amenința cu bisturiul ! Din două motive, nu ! Mai întîi că nu există inversul vreunui număr în afară de 1 și apoi fiind că inversul lui zero este ∞ !

— Cînd ne vom revedea, peste cîteva luni, vă vom ruga să ne conduceți dumneavoastră ! Răspunsul acesta implică oferta !

— Cu multă plăcere, numai că deocamdată vă rog să-mi faceți legătura dintre *noțiunea de grup* și cea de *structură matematică*, sau numai cu aceea de *structură algebrică*, dacă vreți. În limbajul meu, consider că pînă acum ați deschis rana, dar nu ați terminat operația și nici nu ați cusut-o la loc. Nu știu cum s-a putut face trecerea de la *obiectivul clasic al algebrei*: *rezolvarea ecuațiilor*, la cel despre care vorbeați acum : *studiul structurilor algebrice* ?

— Întîi să stabilim ce se înțelege printr-o structură algebrică : cînd avem de-a face cu o mulțime de elemente M și în această mulțime de elemente se stabilește *una* sau *mai multe legi*, de compoziție între elementele ei, sau între elementele ei și elementele unei alte mulțimi M_1 deosebite de aceasta, se spune că s-a *definit o structură algebrică* pe mulțimea M.

— Așadar, acum este clar, grupul este de fapt o *structură algebrică*, în care există o singură lege de compoziție între elementele mulțimii M.

— Da, și anume aceasta este *o lege de compoziție internă*. O altă *structură algebrică*, dar cu *două* legi de compoziție interne, se numește *inel*. Nu intru în amănunte, vă spun numai că există și alte structuri algebrice ca, de pildă, *corp*, *modul* sau *grupuri cu operatori*, *inele cu operatori* etc. Ultimele două structuri cuprind pe lîngă legile de compozi-

ţie internă şi altele, de compoziţie externă care leagă elementele din *M* cu elementele unei alte mulţimi M_1.

— Păţesc şi eu ca domnul Jourdain a lui Molière, numai că eu nu am descoperit că fac proză, ci că, din şcoala elementară, de cînd am învăţat să operez cu numerele, am tot aplicat *legi de compoziţie* ! Cu alte cuvinte, constat că noţiunea de lege de compoziţie trebuie să fie una dintre cele mai vechi noţiuni matematice ! Egiptenii, babilonenii, chinezii, hinduşii şi toate popoarele din vechime, tot legi de compoziţie au născocit, numai că şi ei, ca şi mine săracul, nu s-au gîndit să precizeze acest fapt, adică să le dea o justificare, ci le-au folosit în mod intuitiv !

— Aveţi dreptate, dragă doctore, şi cu această ocazie să ne întoarcem iar la greci, ca din nou să ne exprimăm admiraţia faţă *de darul lor de a gîndi*, de a despica firul în patru !

— Numai că, de data aceasta, admiraţia dumnevoastră, stimate profesore, este fără de obiect, fiindcă grecii nu au dat nici o atenţie calculului algebric. Euclid a înglobat rezolvarea ecuaţiilor de gradul I şi II în geometrie şi a *stabilit* soluţiile lor pe cale geometrică. Din cauza aceasta, grecii nici nu au putut considera operaţia înmulţirii ca pe *o lege de compoziţie*, căci pentru ei produsul dintre două lungimi nu mai era o lungime, ci o arie ! De-abia Diofant a introdus regulile de calcul transmise de la egipteni şi babiloneni, dar asta s-a întîmplat cînd marii matematicieni greci trecuseră de mult în lumea cealaltă ! Abia prin matematicienii italieni din secolul al XVI-lea algebra cunoaşte o adevărată dezvoltare, anume după ce ei au reuşit să găsească soluţiile generale, prin radicali, ale ecuaţiilor de gradul trei şi patru. Mai tîrziu, prin Viète şi Descartes s-au perfecţionat şi notaţiile algebrice şi, în fine, prin Gauss şi Lagrange se impune în Algebră şi noţiunea de lege de compoziţie, care s-a desprins din cercetările întreprinse de ei şi de alţi matematicieni în legătură cu rezolvarea prin radicali a ecuaţiilor algebrice de gradul cinci şi mai mare decît cinci. Or, raţionamentele care au stabilit condiţiile de rezolvare ale unei ecuaţii algebrice prin radicali au impus să se asocieze la ecuaţia cercetată şi un *anumit grup* de substituţii format din rădăcinile şi coeficienţii ei. Astfel, s-a făcut legătura dintre rezolvarea ecuaţiilor şi teoria grupurilor, iar mai

departe lucrurile s-au dezvoltat de la sine ! Teoria formelor algebrice, studiul abstract al legilor de compoziție au lărgit noțiunea de algebră și s-a ajuns la algebra abstractă, la logica simbolică. În rezumat, putem spune că obiectul principal al algebrei moderne este *studiul structurilor*, adică a familiilor de relații dintre elementele unei mulțimi *M* sau între anumite părți ale ei. Aceste relații sînt legile de compunere — interne sau externe — peste tot definite și supuse unor condiții generale. Astfel se determină structurile algebrice de grup, de inel, corp etc.



Georges Bouligand

— Fiindcă vorbim despre grupuri, iată și o privire generală a profesorului Georges Bouligand, pe care am avut bucuria să-l cunosc cînd am luat parte la Congresul internațional de istorie a științelor care s-a ținut în 1968 la Paris și în anul 1981 — la București. Din cartea pe care mi-a dăruit-o atunci, am să vă citesc aceste rînduri deosebite: „Cercetarea celui mai larg cîmp de aplicație a unei propozițiuni introduce în matematică o noțiune deosebit de fecundă, *noțiunea de grup*. Dintr-un caz în care un anumit enunț se verifică, să căutăm a deduce pe toate celelalte. Modificările care conduc de la primul caz (*a*) la al doilea (*b*) în care rezultatul se menține ($a \rightarrow b$), compus cu modificările care conduce de la acest al doilea caz la un al treilea

(*c*), în care rezultatul dăinuie încă ($b \rightarrow c$) dă o modificare ce duce direct de la primul caz la al treilea ($a \rightarrow c$). Compunînd două modificări, care păstrează fiecare enunțul, se obține iar o modificare din aceeași familie. Pe scurt, spunem că aceste modificări formează un grup". (33)

— Acum a venit rîndul meu să vă citesc ceva relativ la structură din cartea despre care v-am vorbit a acad. *Gulian* : „Termenul „structură" (sistem) este astăzi o noțiune care a intrat nu numai în terminologia științelor sociale și a științelor naturii, dar și în limbajul curent. Această largă folosire nu poate fi numai un simptom de modă, ci exprimă și o necesitate". (34, p. 6) Mai departe, iată o relatare extrem de curioasă : „Într-o foarte recentă lucrare de sinteză etnologică se afirmă : — O definiție a conceptului de structură, care să cuprindă toate definițiile particulare nu există. Recenzînd cele patruzeci și unu de sinonime pe care le-a aflat, *Oppitz* constată că sub același cuvînt „structură" se pot întîlni sensuri indiscutabil divergente. Evantaiul de sensuri merge, de fapt, de la o accepție mentală, pînă la o accepție obiectivă, realistă". (p. 13) Și ceva care vă privește direct pe dumneavoastră : „Dacă am ținut să marcăm antecedentele istorice ale metodei structurale, aceasta nu ne scutește de obligația elementară de a evidenția ce aduce *nou* metoda structurală : *modernizarea* (formalizarea) noțiunilor de structură și model, în consens cu tendința generală a matematicilor, a lingvisticii și a științelor naturii în epoca noastră". (p. 19) Nu vreau să abuzez prea mult de întreruperea ce am făcut-o de la subiectul nostru, așa că trec la cealaltă carte din care citesc doar un pasaj pe care nici nu-l comentez : „Ce trebuie să înțelegem prin structură socială ? Prin ce se deosebesc studiile care se referă la ea de toate descrierile, analizele și teoriile care vizează relațiile sociale, înțelese în sens larg și care se confundă cu obiectul însuși al antropologiei ? Autorii nu sînt de loc de acord asupra conținutului acestei noțiuni, chiar unii dintre cei ce au contribuit la introducerea ei par azi a o regreta. Astfel, în a doua ediție a *Antropologiei* sale, *Kroeber* scrie : — Noțiunea de „structură" nu este, probabil, nimic altceva decît o concesie față de modă : un termen cu sens bine definit începe să exercite deodată o atracție ciudată în decurs de vreo zece ani, cum ar fi, de pildă,

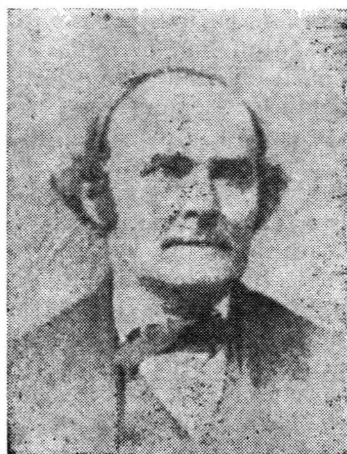
cuvîntul *aerodinamic*; lumea începe să-l întrebuinţeze fără discernămînt, pentru că sună plăcut la ureche. Fără îndoială, o personalitate tipică poate fi considerată din punct de vedere al structurii sale. Dar acelaşi lucru este adevărat pentru o articulare fiziologică, pentru un organism, pentru o societate sau o cultură oarecare, pentru un cristal sau o maşină. Orice lucru, cu condiţia de a nu fi complet amorf, posedă o structură. Astfel încît se pare că termenul de „structură" nu adaugă absolut nimic la ceea ce ştim atunci cînd îl întrebuinţăm, decît o picanterie agreabilă". (35, p. 334) Am terminat, acum putem relua discuţia noastră despre *elementele caracteristice ale activităţii matematice.*

— Da, o vom relua, însă mai înainte aş vrea să mă lămuriţi cum de acceptaţi dumneavoastră, stimate doctore, ba chiar aţi ţinut să accentuaţi tocmai această latură a faptului, anume că o noţiune poate avea felurite interpretări, unele chiar îndoielnice, atunci cînd ea se aplică în diferite domenii ale activităţii umane, dar nu acceptaţi aceeaşi ambiguitate cînd e vorba de domeniul matematicii?

— Ştiu eu? Mi-e greu să vă spun, poate că asta ţine de structura mea sufletească. Din copilărie am ştiut că „unu şi cu unu fac doi: scurt", şi prin această propoziţie mi s-a precizat *imaginea neîndoielii*. Apoi cînd am învăţat să demonstrez teoremele din geometrie, ştiam că aceste demonstraţii nu pot duce decît la concluzii *perfect adevărate*, că nu se poate ajunge niciodată la ceva dubios, şovăielnic şi de atunci nimic nu mi-a mai zdruncinat încrederea mea în matematică!

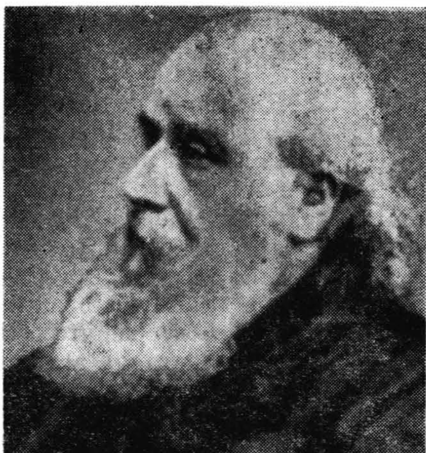
— Da, eu îl înţeleg pe doctorul nostru şi la cele ce ne-a spus acum, aş alătura mărturisirea lui Arthur Cayley: „Frumuseţea unei teorii matematice, ca şi a multor altele, o poţi simţi, dar nu o poţi explica". Cînd ne vom revedea, aş vrea să vă povestesc despre prietenia matematică dintre Arthur Cayley şi James J. Sylvester, care a fost, ca şi viaţa lor, nemaipomenită, încîntătoare! Pînă atunci, Nucule, ai cuvîntul!

— Iată ce spune Beth: „În ceea ce priveşte obiectul *activităţii matematice*, îmi pare că trebuie să deosebim trei elemente. Obiectul primar al acestei activităţi este lumea întreagă a experienţei noastre. Dar după cum am observat,



Arthur Cayley

activitatea matematică nu se mărgineşte numai la acest domeniu; ea tinde să considere, de asemenea, şi propriile ei rezultate şi, în particular, propria ei structură care constituie deci un obiect secundar al activităţii matematice. Alături de aceste obiecte, primar şi secundar, activitatea matematică mai are un obiect *sui generis*, care, după toate aparenţele, nu se reduce nici la lumea experienţei noastre,



James J. Sylvester

nici la structura matematicii : *infinitul.* Tocmai posesiunea unui obiect *sui generis* garantează autonomia matematicii și explică tendința ei de a se îndepărta de lumea experienței noastre ; din cauza acestei tendințe, elementele structurale ale activității matematice se ridică din ce în ce mai mult pe primul plan, în dauna obiectului ei primar. Această tendință stă la baza dezvoltării moderne a matematicii și a cercetărilor fundamentelor ; ea este, de asemenea, responsabilă de ruptura cu concepțiile tradiționale în ceea ce privește activitatea matematică și criza fundamentelor. Este deci foarte natural ca aderenții raționalismului tradițional să interpreteze criza fundamentelor ca un eșec total a acestei tendințe a activității matematice și să recomande, pentru a ieși din impas, o revenire la cadrele tradiționale ale acestei activități Am văzut, totuși, că matematicienii au găsit alte soluții". (7, p. 203)

— Cred și eu ! Cum ar fi posibil să te-ntorci în trecut cînd s-au schimbat condițiile de activitate și prin urmare înseși problemele care se impun activității matematice ?

— Desigur. Dacă ne întoarcem la egipteni și babiloneni și ne gîndim la uriașele cantități de materiale ce trebuiau depozitate, să zicem în vederea construirii templelor și a palatelor, acestea cereau metode a fi înregistrate, așadar, iată problemele care se puneau : sisteme de numărare, de măsurare, într-un cuvînt matematica practică.

— La aceste operații trebuie adăugate și acelea, tot de natură practică, de stabilirea și prevederea timpului, cu alte cuvinte astronomia și întocmirea calendarului.

— Că exista o activitate matematică intensă, îndreptată însă numai spre lumea exterioară și de natură pur practică o dovedesc toate papirusurile conținînd probleme matematice, scrise de egipteni, precum și zecile de mii de tăblițe, umplute de calcule, descoperite în Cîmpia Mesopotamiei. În nici una dintre aceste scrieri nu apare vreo aluzie sau vreo încercare, oricît de mică, de abstractizare. Trecerea către o activitate matematică abstractă se datorește altei civilizații, celei grecești. Pitagora privea numărul ca elementul primordial al Universului.

— Pitagoreicul Philolaos spunea : „lucrurile nu ar fi clare, nici în raport cu noi și nici în relațiile reciproce dintre ele, dacă n-ar exista numărul și esența lui".

— Asta-i numai una dintre cugetările lui, dar sînt încă altele, numeroase, pe care eu nu le știu, ca tine, pe dinafară, dragă Toader. Le-am citit cîndva și le-am admirat. O aplicație directă a lor ar fi la armonia muzicală ! Însă Platon este acela care a introdus definițiile în matematică și a separat complet activitatea matematică practică de cea teoretică, prin introducerea noțiunilor matematice abstracte.

— Un bun definitiv cîștigat, și de aici înainte matematica pură va coexista alături de cea aplicată, secole de-a rîndul, intensitatea uneia sau alteia dintre aceste aspecte ale activității matematice depinzînd de prefacerile sociale ce au avut loc atunci. Abia în secolul al XVI-lea se produce o schimbare, activitatea matematică luînd o nouă înfățișare. Prin lucrările lui Tartaglia, Cardan, Viète, Stevin, Napier ș.a. se introduc procedee și tehnici noi de calcul care permit lui Galileu și Kepler descoperirile ce aveau să deschidă calea lui Newton și Huygens. Astfel că, pînă în secolul al XIX-lea, activitatea matematică va rămîne subordonată științelor fizice, tehnicii și industriei și va fi legată de lumea experienței.

— În linii mari da, însă ar fi exagerat să spunem că pînă în secolul al XIX-lea nu s-au făcut și lucrări de matematică pură !

— Bine, nu vreau să intru în amănunte, căci atunci nu am mai termina nici azi, nici mîine, nici poimîine. Desigur că în acest răstimp s-au acumulat datele care să ducă la o nouă izbucnire a activității matematice pure-teoretice și în afară de lumea experiențelor fizice : geometriile neeuclidiene, geometriile cu mai multe dimensiuni, teoria mulțimilor, structurile algebrice, cercetarea fundamentelor matematicii ș.a.m.d.

— Că la sfîrșitul secolului al XIX-lea nu se putea vorbi încă, de pildă, despre o fundamentare riguroasă a Analizei matematice, se știe din faptul că nu era lămurită noțiunea de *mărime continuă*. Pentru numărul real existau atunci mai multe definiții care nu concordau între ele. De pildă, *R. Dedekind* a publicat, în 1872, lucrarea *Continuitatea și numerele iraționale*, în care definea numărul real prin tăietura pe axa numerelor raționale, despre care am vorbit odată, însă această definiție a fost criticată de alți matematicieni. Dar iată și un alt exemplu care arată cît de diferite erau

punctele de vedere și în legătură cu conceptul primordial de *număr natural*. Se află într-o scrisoare pe care a trimis-o *R. Dedekind* lui *H. Weber*, în 1888 : „trebuie să-ți mărturisesc că eu consider, pînă în prezent, numărul ordinal, nu pe cel cardinal, ca fiind conceptul inițial de număr... Consider numărul cardinal numai ca o aplicație a celui ordinal și chiar în acest „arithmitisein" al nostru se ajunge la conceptul de „cinci" numai prin conceptul „patru". Dacă vrem să mergem pe drumul tău — și aș recomanda cu căldură să fie odată parcurs în întregime — aș da totuși sfatul, ca prin număr (număr cardinal) să nu se înțeleagă însăși *clasa* (sistemul tuturor sistemelor finite asemenea între ele), ci ceva *nou* (corespunzător acestei clase), pe care spiritul *îl creează*... Aceasta este aceeași problemă ca atunci cînd tu spui că numărul irațional n-ar fi în genere altceva decît tăietura însăși, în timp ce eu prefer să creez ceva *nou* (diferit de tăietură) care corespunde tăieturii și care afirm că generează, produce tăietura... Ceva cu totul asemănător este adevărat și despre definiția numărului cardinal ca o clasă : se vor spune multe despre *clasă* (de pildă, se va spune că ea este un sistem cu o infinitate de elemente, anume sistemul tuturor sistemelor asemănătoare), ceea ce desigur nu i s-ar asocia deloc cu plăcere numărului (ca trăsătură principală). Se gîndește oare cineva la faptul că numărul 4 este un sistem cu o infinitate de elemente, sau nu va vrea oare să uite cît mai repede acest lucru ? (Însă faptul că numărul 4 este copilul numărului 3 și tatăl numărului 5 va rămîne totdeauna în mintea fiecăruia)". (14, p. 273)

— Foarte frumoasă a fost această scrisoare, Nucule, dar să nu uităm că ne-a mai rămas de discutat și despre *cel de-al treilea obiect, sui-generis*, cum l-a numit Beth, al activității matematice, adică despre *infinit !*

— Ești mata șmecher, Bădie, dar uiți că eu ți-s nepot ! Parcă nu știu eu de ce te grăbești ? Ai mata ceva despre infinit în *Poincaré* și tare nu mai ai răbdare ! Parcă nu am băgat de seamă cum răsfoiai *Dernières Pensées ?* Numai că, mai este și profesorul meu aici, care desigur că are să ne spună ceva despre felul cum a văzut Platon problema infinitului și cred că are întîietate ! Îl amintesc pe Platon, fiindcă de Aristotel ne-ați vorbit !

— Vedeţi ce înseamnă să fi avut elevi buni ?

— Vedem ! Poftim spune ce-ţi stă pe inimă !

— Nu-mi stă nimic pe inimă, dar, ca să-i fac hatîrul lui Nucu, aş putea aminti că Platon a fost şi el preocupat de această noţiune a infinitului şi o exprima, desigur mai puţin precis decît Aristotel, dar oricum înaintea lui, prin expresia „mai mult sau mai puţin", adică printr-o formulă care să dea impresia de *continuă mişcare*, fără ca să devină niciodată „cît", care ar fi însemnat că a *încetat mişcarea* şi *se intră în repaus*. (14, p. 102) Natural că şi Platon avea în vedere tot *infinitul potenţial*, cum o va face şi Aristotel. Dar ca să nu mă ia băiatul acesta peste picior cu preferinţele mele pentru antici, am să vă citesc din caietul meu cîteva rînduri pe care le-am notat din cartea academicianului Octav Onicescu, despre care am mai vorbit: „Eliminarea completă a infinitului din matematici nu a reuşit... pentru că infinitul joacă un rol esenţial în procesul constituirii obiectelor, cu toată aparenţa paradoxală a acestei afirmaţii. Fiecare dintre experienţele noastre are loc între frontiere finite. Dar, ceea ce numim *experienţă*, în general, nu reprezintă un număr limitat, închis, rigid, de experienţe determinate ; ea reprezintă toate experienţele trăite efectiv de noi ca şi pe acelea pe care le cunoaştem prin intermediul altor persoane şi participă, de asemenea, chiar dacă cu un



Octav Onicescu

sentiment vag, la experiențele viitoare. Astfel *înțeleasă*, experiența nu neagă infinitul, ci este obligată să țină cont de el. Experiența omenească îi conferă infinitului, deși nu-l înțelege, un loc esențial". (15, p. 95)

— Am pus eu ochii pe caietul dumneavoastră, stimate profesore ! Mi-ar plăcea să-l citesc.

— Poftim, vi-l împrumut și cînd îl veți termina vă voi da și altele, că a fost o pasiune a mea din tinerețe : să-mi notez fraze frumos scrise. Și asta spre deosebire de prietenul meu care nu notează, dar ține minte cartea din care a citit ceva frumos și, nu exagerez dacă spun, chiar și pagina !

— Ba, să avem iertare, cred că exagerezi. Nu mi-ai auzit nepotul ? Spunea că răsfoiam *Dernières Pensées* și avea dreptate. Știam eu că era acolo o chestie potrivită pentru problema noastră, dar nu o găseam. Iat-o : „printre matematicieni există două tendințe opuse în modul de a considera infinitul. Pentru unii, infinitul derivă din finit, există un infinit pentru că există o infinitate de lucruri finite posibile : pentru alții, infinitul preexistă finitului și finitul se obține tăind o bucățică din infinit... pentru primii o mulțime se constituie prin adăugire succesivă de obiecte noi și se pot construi obiecte noi prin combinarea celor vechi, apoi împreună cu acestea alte obiecte și mai noi, și dacă mulțimea devine infinită, este pentru că nu există nici o rațiune ca operația să se termine. Pentru ceilalți, din contra, se pornește de la o mulțime în care se găsesc obiecte preexistente, care apar la început confuze, dar treptat, unele dintre ele încep prin a fi recunoscute pentru că li se lipesc etichete și sînt așezate în sertare, dar obiectele sînt anterioare etichetelor și mulțimea ar exista chiar dacă nu ar fi cine să le claseze". (10, p. 144 și 148)

Desigur că acestea-s numai o mică parte din gîndurile lui Poincaré îndreptate spre infinit. Și, desigur, nu s-au arătat toate la fel de rezistente în fața viitorului. Iată, de pildă, o întrebare pe care am considerat-o mulți ani, fără de cusur și chiar am zăbovit asupra ei cu încîntare. Dar mai bine să v-o citesc întîi și apoi să vă spun ce a fost mai departe : „Este posibil", se întreabă Poincaré, „să raționezi asupra obiectelor care nu se pot defini printr-un număr finit de cuvinte ? Este oare posibil să vorbești despre ele, știind despre ce este vorba și pronunțînd altceva decît

cuvinte goale ? Sau, din contra, trebuie să le privim ca imposibile ? Cît despre mine, nu ezit să răspund că este pură zădărnicie. Toate obiectele pe care le considerăm sînt sau definite printr-un număr finit de cuvinte, sau nu pot fi decît imperfect determinate și vor rămîne nediferențiate de o mulțime de alte obiecte" (p. 132) Că nu aceasta era și părerea *Cantorienilor*, ne-o arată tot Poincaré, mai departe, în articolul următor : „Cantorienii nu vor să admită aceasta ; un om oricît de vorbăreț ar fi nu va pronunța niciodată în viața lui mai mult decît un miliard de cuvinte ; înseamnă că trebuie să excludem din știință obiectele a căror definiție conțin un miliard și unu de cuvinte ? Și dacă nu le excludem, de ce le-am exclude pe acelea care nu pot fi definite decît printr-un număr infinit de cuvinte, odată ce construcția unora ca și a celorlalte este deasupra posibilităților omenești ?" (p. 146) Și acum surpriza : Nu de mult am găsit recenzată în „Mathematical Rewievs" o carte intitulată *Infinitary Logic*, publicată în 1975, în memoria lui *Carol Karp*, fost profesor la Universitatea din Maryland, care a susținut, în 1959, teza de doctorat cu subiectul : „Limbaje cu expresii infinit de lungi" ! Am găsit acolo și următoarea explicație : „Din punct de vedere metamatematic, calculul formal bazat pe un limbaj cu expresii de lungimi infinite și avînd demonstrații formale infinit de lungi, nu au nici o valoare. Dar, în ultimii ani s-au observat anumite rezultate algebrice provenite din studiul sistemelor formale... și din acest punct de vedere este profitabil să considerăm *calculul formal infinit*".

— Este în adevăr o surpriză : *limbaje cu expresii infinit de lungi* !

— De ce vă mirați, stimate doctore ? Intuiționiștii desigur că vor ignora mai departe asemenea probleme, considerîndu-le că nu există, dar pentru acei ce încă mai caută o soluție problemei continuului, ea poate fi extrem de interesantă ! Și, în ceea ce-l privește pe Bădia, mă mir că a fost surprins, fiindcă dumnealui a mai întîmpinat și alte cazuri în care *oracolele idolului* au fost dezmințite !

— Ai spus *problema* continuului și nu *ipoteza* continuului ? Eu parcă știam de ipoteza continuului !

— M-am referit acum la *problema continuului*, stimate profesore, fiindcă există amîndouă, dar între ele este o

deosebire. Anume, așa după cum am văzut, ipoteza continuului exprimă că toate mulțimile nenumărabile de numere reale au puterea continuului și se exprimă prin formula

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \quad (1)$$

Ele se pot compara cu totalitatea punctelor de pe o dreaptă. Însă, spre deosebire de mulțimea numerelor naturale, raționale, sau algebrice, aceste numere reale nu pot fi *ordonate*, în sensul că ele nu pot forma o *mulțime numărabilă*, ci formează *o mulțime continuă* și din cauza aceasta *infinitul actual nu poate fi imaginat*. *Hilbert* a încercat să demonstreze formula aceasta a lui *Cantor*, dar demonstrația lui a fost considerată de ceilalți matematicieni numai ca o *încercare* de demonstrație și după cum arată *W. Sierpinski* în articolul din care am aceste informații (9, p. 130): „există chiar matematicieni care nu cred în posibilitatea de a rezolva problema dacă egalitatea (1) este adevărată sau nu, fără a admite o nouă axiomă". Și tot el adaugă: „Teoria mulțimilor de puncte ar fi mult simplificată dacă ipoteza continuului ar fi demonstrată. Ipoteza continuului implică, printre altele, existența unei mulțimi bine ordonate, avînd puterea continuului, deci, în cazul că formula (1) ar fi adevărată, s-ar putea demonstra, fără a mai aplica axioma alegerii, toate teoremele a căror demonstrație se bazează pe existența unei mulțimi bine ordonate formată din toate numerele reale". V-am citat acest fragment numai ca să vă dau ocazia, stimate doctore, să vedeți cît de complicate și totodată subtile sînt numai o parte dintre problemele puse de ipoteza continuului. Și acum, vreau să vă răspund dumneavoastră, dragă profesore, folosind același articol: „Trebuie să facem o deosebire între *ipoteza continuului* și *problema continuului*, care constă în stabilirea locului ocupat de continuu printre *alefi*, adică să se determine numărul ordinal a pentru care $2^{\aleph_0} = \aleph_a$. O asemenea poziție a problemei presupune, în mod natural, că puterea continuului este un alef, adică presupune existența unei mulțimi bine ordonate ale puterii continuului. În cazul cînd ipoteza continuului ar fi adevărată, am avea în mod evident $a = 1$; dar nu-i încă demonstrat că a nu este egal cu 2... S-au tras multe consecințe din ipoteza continuului, care nu au dus,

niciodată, la vreo contradicție... pe de altă parte, multe propoziții importante, din diverse ramuri ale matematicii nu se pot demonstra, în starea actuală a științei, decît făcînd să intervină *ipoteza continuului*. Se cunosc chiar un anumit număr de propoziții interesante care sînt echivalente cu această ipoteză. Toate acestea justifică viul interes pe care-l are ipoteza continuului". (p. 131)

— Ce captivante au fost toate aceste probleme pe care le-am cunoscut din discuțiile noastre ! Dacă nu s-ar fi întîmplat să mă nimeresc exact în ziua aceea cînd erați cu toții aici, habar n-aș fi avut că pot exista asemenea întrebări și preocupări ! Mai ales teoria mulțimilor, infinitul, faptul că se poate stabili o distincție precisă între o mulțime infinită de numere și o alta infinită, prin aceea că o mulțime infinită poate fi pusă în corespondență biunivocă cu o submulțime strictă a celeilalte... că mulțimea tuturor numerelor pare, sau a tuturor pătratelor numerelor întregi, poate fi pusă în corespondență biunivocă cu mulțimea tuturor numerelor naturale, pe cînd dacă mulțimile ar fi finite, aceste corespondențe ar părea absurde, drept să vă spun că m-au impresionat profund ! Sînt rezultate care te îndeamnă să te-nchini în fața puterii de gîndire a omului !

— Nu degeaba a spus Hilbert : „Infinitul, nici o întrebare nu a zguduit mai mult spiritul omului". Dar, aș vrea să vă întreb, oare ca să deschizi țeasta unui om și să-i umbli prin creierul lui zdrobit, reparîndu-l și făcîndu-l să vadă, sau să audă, sau să vorbească din nou, e mai puțin impresionant ?

— Da, recunosc că și asta este adevărat.

— Trebuia să o recunoașteți, că doar nu degeaba hîtrul academician Moisil a compus această *vorbă de duh* : „Orice poate fi demonstrat, chiar și adevărul" ! (19, p. 29)

POSTFAȚĂ

Discuțiile cu privire la fundamentele matematicii au pus, în mod firesc, întrebarea despre esența matematicii. Și, după cum am constatat, matematicienii au dat răspunsuri multe și foarte diferite între ele, din care cauză nu s-a putut ajunge la o concluzie generală și unică asupra naturii și obiectului matematicii, ci doar la precizarea unora dintre aspectele ei. Să ne amintim, de pildă, răspunsul, încîntător ca un poem în proză a lui *F. Gonseth* : „În esența ei, matematica nu-i decît un ansamblu de vederi și de procedee schematice ale spiritului nostru, replică conștientă a activității inconștiente care creează în noi o imagine a lumii și un ansamblu de norme după care noi acționăm și reacționăm. Nu-i un edificiu ancorat undeva într-o absolută soliditate, ci o construcție aeriană care rezistă ca prin minune : cea mai îndrăzneață și neverosimilă aventură a spiritului". (12, p. 240) Răspunsul lui *A. D. Alexandrov* este mai sobru, în schimb atinge problema mai real : „Matematica are ca obiect formele și relațiile obiective ale realității ; dar, după cum spune *Engels*, pentru a studia aceste forme și relații în forma lor pură, trebuie să le separăm total de conținutul lor, să-l omitem ca pe ceva indiferent. Nu există însă forme și relații fără conținut, formele și relațiile matematice nu pot fi absolut indiferente față de conținut. În consecință matematica, disciplina care prin însăși esența ei tinde să realizeze această separare, tinde să realizeze imposibilul. *Aceasta este contradicția fundamentală din esența însăși a matematicii*... Redarea prin gîndire a oricărui fenomen, a oricărui aspect, a oricărui moment al realității îl simplifică, smulgîndu-l din conexiunea universală a natu-

rii... . *Matematica pură „se neagă" permanent ca matematică pură*: altfel, ea nu poate avea valoare științifică, nu se poate dezvolta, nu poate depăși dificultățile care apar inevitabil în cadrul ei". (32, p. 93) Două răspunsuri opuse, suficiente ca să putem înțelege de ce și rezultatele privind fundamentele matematicii s-au grupat în mai multe categorii, purtînd numele de *logicism, formalism, intuiționism*, etc.

Logicismul, dezvoltat de *G. Frege* și *B. Russell,* își trage numele din faptul că a reușit să deducă pe cale logică, pornind numai de la noțiunile din teoria mulțimilor și fără să se bazeze pe vreo axiomă specific matematică, nu numai aritmetica, dar și întreaga matematică. Exprimînd termenii aritmetici în limbajul logicii simbolice, logiciștii ar fi reușit să reducă matematica la logică dacă nu s-ar fi descoperit paradoxele din teoria mulțimilor. Aspectul acesta, logicist, al matematicii nu se poate identifica însă cu întregul domeniu matematic fiindcă, deși matematica este logică, *ea nu este numai logică,* adică o vastă tautologie, ci mai este încă și *altceva,* altceva care-i permite să se dezvolte și să se depășească mereu și în mod nebănuit. Continuînd să se situeze pe această poziție, logiciștii sînt nevoiți să caute noi argumente prin care ei consideră că ar putea să descopere, în mod asimptotic, care este esența și care-s fundamentele matematicii.

Formalismul se înfățișează ca o altă tentativă de a dezlega taina fundamentelor matematicii. *David Hilbert,* întemeietorul școlii, și-a propus să înlăture orice îndoială cu privire la rigurozitatea raționamentului matematic, prin introducerea unui număr finit de simboluri, pentru a se evita astfel antinomiile din teoria mulțimilor, cu ajutorul cărora să reducă toate teoriile matematice și raționamentele intuitive la operații formale între aceste simboluri lipsite de orice semnificație în afară de definiția și axiomele prin care au fost introduse. El a stabilit astfel o metodă formalizată și pe de-a-ntregul axiomatizată, cunoscută sub numele de *teoria demonstrației,* în care independența și consistența axiomelor era garantată prin analiza *metamatematică* a sistemelor de simboluri considerate. Dar și aceste încercări nu au dus la succesul sperat căci caracterul finit al raționamentelor metamatematice l-au condus

pe Kurt Gödel la descoperirea că prin metode finite nu se poate stabili necontradicția aritmeticii elementare! Mai mult chiar, Gödel a dovedit că orice sistem axiomatizat este ori incomplet, ori indecidabil. Nici formalismul nu a reușit deci să înlăture din calea sa obstacolele pe care le-a întîlnit, pentru că și el a privit numai către un singur aspect al realității matematice, acela al axiomatizării și a procesului de demonstrație.

Intuiționismul consideră matematica întocmai ca pe o activitate autonomă a spiritului, avînd un caracter sintetic-intuitiv. Admițînd că o propoziție matematică este valabilă numai dacă-și afirmă existența în mod intuitiv sau arătînd o metodă practică prin care să se stabilească sau să se construiască obiectul respectiv, intuiționismul nu permite nici demonstrațiile logice și nici axiomatizarea formalistă. *L. E. J. Brouwer* a pus bazele intuiționismului, anticipat fiind de Immanuel Kant, care în *Critica rațiunii pure* afirmă că „judecățile matematice sînt toate sintetice și bazate pe intuiție", de *H. Poincaré*, care a adăugat la cele susținute de Kant că „raționamentul matematic are în el însuși un fel de virtute creatoare și prin urmare se deosebește de silogism", de *L. Kronecker*, care spunea că „ar trebui ca toate rezultatele cercetărilor matematice, oricît de profunde ar fi, să se poată exprima sub forma simplă a proprietăților numerelor naturale", de *H. Lebesgue*: „A arăta cum se construiește matematica înseamnă a-i studia fundamentele, dar dintr-un punct de vedere care ne scoate dincolo de domeniul logicii", și mulți alții. *Brouwer* a analizat atît atitudinea logicistică a lui Frege și Russel, cît și procedeele axiomatizării și ale formalizării matematicii aplicate de *Hilbert*, de asemeni și teoria mulțimilor a lui *G. Cantor* și a ajuns la concluzia că logistica trebuie să fie separată de matematică; aceste două obiecte fiind legate împreună numai prin limbajul matematic care întovărășește construcțiile logistice. Apoi că, prin limbajul său, logica depinde de matematică, în timp ce matematica este independentă de logică și o folosește doar ca un instrument necesar. În privința formalizării, deși există unele puncte de asemănare între raționamentele metamatematice finitiste ale lui Hilbert și tezele finitiste ale intuiționismului — ambele datorită idealismului kantian —, există o deosebire esențială între

ele, care l-a condus pe Brouwer la o schemă diferită a formalizării intuitive. Şi teoria mulţimilor a fost pe de-a-ntregul condamnată, atît pentru definiţia naivă a mulţimilor, cît şi pentru introducerea în raţionamentul matematic a *infinitului actual*, care a condus la aplicarea fără discernămînt a principiului terţiului exclus. În concluzie constată că matematica şi-a pierdut astfel contactul cu realitatea gîndirii şi ca să-l recîştige ea trebuie să devină *intuitivă* şi *constructivă*, raţionamentele ei aplicîndu-se *numai la mulţimi finite de obiecte*. Aceste şi alte observaţii l-au condus către o nouă logică, intuiţionistă, construită pe ipoteza că numai *principiul contradicţiei este valabil întotdeauna*, pe cînd *principiul terţiului exclus se aplică numai în cazul mulţimilor finite*. Propoziţiile logicii intuiţioniste admit trei valori : adevărul, falsul sau indiferenţa ; este, aşadar, o *logică trivalentă*. Cercetările au fost continuate de *A. Heyting* şi în ultima vreme de *Everett Bishop*, care a adus elemente noi, dînd intuiţionismului o largă aplicaţie în domeniile noi ale matematicii.

Totuşi, ca şi celelalte două curente discutate mai înainte, intuiţionismul s-a mărginit să aprofundeze o anumită faţă a matematicilor şi prin aceasta s-a rupt şi el de realitate, rezultatele lui, oricît de interesante ar fi reflectînd doar acest singur aspect pe care l-a considerat. *Singura concepţie care poate depăşi aceste rezultate parţiale ca să se avînte spre culmile înţelegerii depline a realităţii şi a dezvoltării reale ale matematicii este aceea a materialismului dialectic.* Aceasta pentru că, după cum afirmă Alexandrov : „În opoziţie cu diversele curente şi variante ale idealismului şi ale metafizicii, materialismul dialectic consideră matematica — ca şi întreaga ştiinţă în ansamblul ei — aşa cum este, în toată bogăţia şi complexitatea conexiunilor şi dezvoltării ei". (32, p. 102).

BIBLIOGRAFIE

1. Stere, E., *Istoria filosofiei antice şi medievale*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976, p. 5.
2. Poincaré, H., *La Science et l'Hypothèse*. E. Flammarion, Paris, 1925, p. 9.
3. Poulet, G., *Conştiinţa critică*. Editura Univers, Bucureşti, 1979, p. 292.
4. Beth, E.W. et Piaget, J., *Épistémologie mathématique et psychologie*. Press Universitaires de France, Paris, 1961.
5. Poincaré, H., *Science et Méthode*. E. Flammarion, Paris, 1927, p. 47.
6. Poincaré, H., *La valeur de la Science*. E. Flammarion, Paris, 1925, p. 12.
7. Beth E.W., *Les Fondements logiques des Mathématiques*. Gauthiers-Vilars, Paris, 1955, p. 16.
8. Dumitriu, A., *Mecanismul logic al matematicilor*. Editura Academiei R.S. România, Bucureşti, 1968, p. 50.
9. Gonseth, F., *Les Entretiens de Zürich sur les Fondements et la Methode des Sciences mathématiques*. S.A. Leemann, Zürich, 1941.
10. Poincaré, H., *Dernières Pensées*, E. Flammarion, Paris, 1933, p. 108.
11. Brunschviecg, L., *Les étapes de la philosophie mathématiques*, Alcan, Paris, 1922, p. 425.
12. Gonseth, F., *Les Fondements des Mathématiques*. A. Blanchard, Paris, 1926, p. V.
13. Körner, Şt., *Introducere în filosofia matematicii*. Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1965, p. 206.
14. Becker, O., *Fundamentele matematicii*. Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1968, p. 347.
15. Onicescu, O., *Principes de logiques et de philosophie mathématiques*. Editura Academiei R.S. România, Bucureşti, 1971, p. 105.
16. Bell, E.T., *Les grands mathématiciens*, Payot, Paris, 1961, p. 589.

17. Joja, A., *Logiques apophantique et logique symbolique*. Revue Roumaine des Sci. sociales. Série Philos. et Logique. T. 16, 1972, 1. p. 83.
18. Newman, J., *The world of mathématics*, vol. III. Simon and Schuster New York, 1956, p. 1 857.
19. Moisil, Gr. C., *Ştiinţă şi umanism*. Editura Junimea, Iaşi, 1979, p. 64, şi 195.
20. Lautman A., *Essai sur l'unité des mathématiques*. Paris, U.E.G., 1977, p. 25.
21. Beth E.W., *The fondations of mathematics*. North-Holland publ. comp. Amsterdam, 1959, p. 21.
22. Reid, C., *Hilbert*, Springer Verlag, Berlin, 1970, p. 98.
23. Hahn, H., *Logique mathématiques et connaissance de la realité*. Hermann, Paris, 1935, p. 27—34.
24. Dieudonné, J., *Les méthodes axiomatiques modernes et les fondaments des mathématiques*. În: F. Le Lionnais: *Les grands courents de la pensées mathématiques*, Paris, 1962, p. 543.
25. *Les méthodes formelles en axiomatiques*. C.N.R.S. Paris, 1953, p. 53; R. Feys, *La formalisation comme suggestion rigoureuse*.
26. Creangă I. şi colectiv, *Introducere în teoria numerelor*. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965, p. 427.
27. Heyting, A., *Intuiţionism. An Introduction*. North-Holland, Amsterdam, 1956.
28. Heyting, A., *Constructivity in Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, 1959.
29. Bishop, E., *Foundations of constructive Analysis*. Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1967.
30. *The Mathematical Intelligencer*. Spring-Verlag, Berlin, vol. 3, nr. 2, 1981, p. 85.
31. Bourbaki, N., *Elements d'histoire des Mathématiques*. Hermann, Paris, 1969.
32. *Matematica, conţinutul, metodele şi importanţa ei*. Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1960, vol. I, pp. 81—102.
33. Bouligand, G., *La causalité des théories mathématiques*. Hermann, Paris, 1934, p. 17.
34. Gulian, C.I., *Marxism şi structuralism*. Editura politică, Bucureşti, 1976.
35. Levi-Strauss, Cl., *Antropologie structurală*. Editura politică, Bucureşti, 1978.

CUPRINS

I Hodoronc-tronc : filosofie 7
II Adîncurile se cer scormonite 26
III Spre uluitorul infinit 42
IV O cale cu hîrtoape 73
V Piatra de încercare 103
VI Ademenit de iluzii 125
VII Alți cutezători semeți 157
VIII Licuricii din adîncuri 185
Postfață 224
Bibliografie 229

Lector GHEORGHE POLESCU
Tehnoredactor CORNEL CRISTESCU

Bun de tipar 13.II.1983. Apărut 1983.
Comanda nr. 2121. Coli de tipar 14,5



Tiparul executat sub comanda nr. 353,
la Întreprinderea poligrafică Iași,
str. 7 Noiembrie nr. 49

„Ca şi în lucrările sale anterioare, prof. dr. doc. Florica T. Câmpan, om de ştiinţă de înaltă competenţă, talent şi cultură, face şi aici dovada măiestriei în prezentarea nu numai accesibilă, dar şi agreabilă a obiectului. Iniţierea în fundamentele matematicii se împleteşte tot timpul cu grija pentru aspectul istoric şi uman al faptelor. Fiecare concept, fiecare rezultat sînt plasate atît în contextul lor genetic, cît şi în cel sistematic."

SOLOMON MARCUS

Lei 10,50